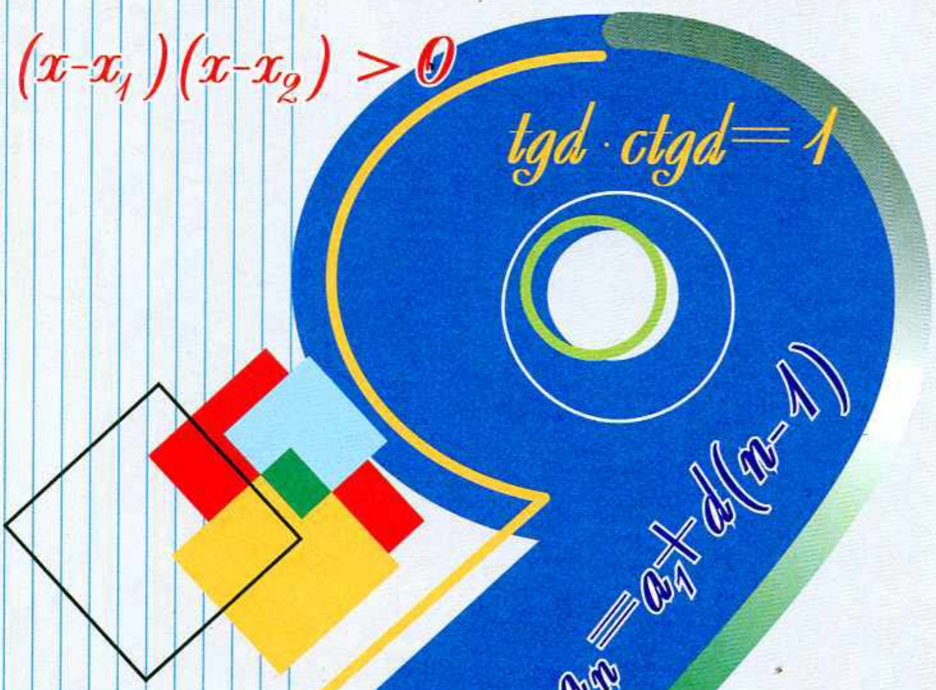
ШКОЛЬНЫЙ КОНСПЕКТ

Ершова А.П.
Голобородько В.В.
Крижановский А.Ф.

$y=ax^2+bx+c$

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО АЛГЕБРЕ



А.П. Ершова, В.В. Голобородько,
А.Ф. Крижановский

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО АЛГЕБРЕ

(по учебнику Ю.Н. Макарычева и др.)

учени____ 9—___ класса

____

____

____

____

Москва
ИЛЕКСА
2012

Рецензенты:

И.Л. Соловейчик — главный редактор приложения «Математика», к газете «Первое сентября», г. Москва;

В.А. Лысенко — учитель-методист Авторской школы Бойко, г. Харьков.

Ершова А.П., Голобородько В.В., Крижановский А.Ф.

Тетрадь-конспект по алгебре для 9 класса.— М.: ИЛЕКСА, 2012.— 128 с.

ISBN 978-5-89237-130-8

Тетрадь-конспект содержит все основные теоретические сведения курса алгебры 9 класса (по учебнику Ю.Н. Макарычева и др.). **Типовые задания** описывают простейшие и более сложные ситуации применения изученных понятий и фактов, часто встречающихся в самостоятельных и контрольных работах. **Полезные задания** описывают дополнительные алгебраические факты. Ко всему материалу приводятся схемы решения задач, графики, таблицы и методические рекомендации. В таблицах и типовых заданиях оставлено место для самостоятельного заполнения учащимися. К отдельным задачам приведены решения или указания к решению.

ISBN 978-5-89237-130-8

Дорогие друзья!

Если вы уже купили эту тетрадь-конспект, то у вас наверняка есть свой собственный взгляд на ее эффективное использование. Если же вы раздумываете – покупать или не покупать, пригодится или будет лежать на полке, – то мы можем вкратце, учитывая собственный опыт работы по учебнику Ю.Н. Макарычева и др. с такими тетрадями, рассказать о той несомненной пользе, которую они приносят на практике.

1. В этой тетради уже **проделана вся рутинная работа** по записи определений, формул, условий задач – Вам остается только заполнить необходимые доказательства и решения.
2. Для основных типов упражнений и задач в тетради приводятся **схемы решения**, в которых даются пошаговые указания последовательности действий и преобразований, приводящих к требуемому результату. В каждой схеме предусмотрена колонка примеров, заполнив которую можно создать образец применения схемы в конкретном примере (задаче) с учетом всех тонкостей и математических нюансов, которые могут при этом встретиться.
3. В этой тетради много ***типовых заданий***, то есть заданий, подобные которым часто встречаются на самостоятельных, контрольных и тематических работах. Их решения желательно оформить **как образец** с учетом всех действующих требований – это облегчит подготовку ко всем письменным работам, в том числе и к экзаменам.
4. Для **более глубокого изучения** алгебры предназначены ***полезные задания***, в которых приводятся дополнительные формулы и факты, которые можно получить на основании изученного материала. Эти задания решаются в тетрадях для практических работ. Много интересного дополнительного материала вы найдете и в главе «Приложение».

И, наконец, эта тетрадь создавалась, в первую очередь, для того, чтобы **существенно сэкономить время** урока и ваше личное время.

Желаем вам успехов!

Будем благодарны за ваши замечания и доброжелательные отзывы, которые вы можете разместить на нашем сайте www.axiom.com.ua.

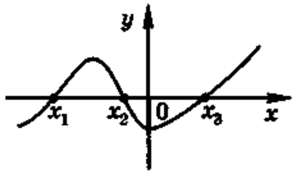
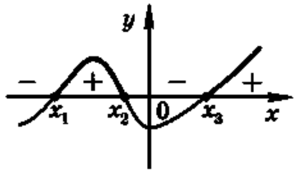
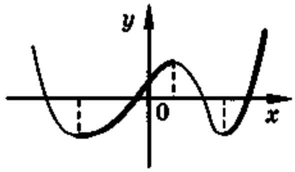
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

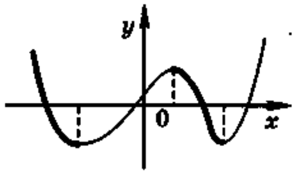
Функции и их свойства

Функция	Определение	Пример
	Функцией называется зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x из некоторого множества соответствует единственное значение y. ***Обозначение.*** $y=f(x)$ – функция, x – независимая переменная (аргумент), y – зависимая переменная или функция от переменной x. Значения зависимой переменной y называются **значениями функции.**	
Область определения функции	**Областью определения** функции $y=f(x)$ называется множество всех значений, которые может принимать аргумент x. ***Обозначение.*** Область определения функции $y=f(x)$ обозначается $D(f)$ или $D(y)$. Если функция задана формулой и ее область определения не указана, то считается, что область определения функции состоит из всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл.	
Нахождение области определения функции	Для нахождения области определения функции $y=f(x)$ необходимо проверить выполнение следующих условий[1]:	*Найдите область определения функции* $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2-25}$.

[1] По ходу дальнейшего изучения алгебры список условий будет дополняться.

	1) знаменатели дробей, входящих в формулу *f*(x), не должны равняться нулю; **2) если формула содержит квадратные корни, то подкоренные выражения должны быть неотрицательны (≥0).**	***Решение.***
Область значений функции	**Областью значений функции $y=f(x)$ называется множество всех значений, которые может принимать функция при всех значениях аргумента из области определения.** ***Обозначение.* Область значений функции $y=f(x)$ обозначается $E(f)$ или $E(y)$.**	***Найдите область значений функции $y = x^2 + 1$.*** ***Решение.***
График функции	**Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.**	
Типовое задание	***Найдите область определения функции, заданной формулой:*** *а)* $y = 5x^2 - 3x$; *б)* $y = \sqrt{6x+1}$; *в)* $y = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$. ***Решение.***	

Свойства функции			
Особые точки и промежутки	**Определение**	**Правило нахождения**	**Графическое представление**
Нули функции	**Нули функции** — это значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.	Решите уравнение $f(x)=0$.	Абсциссы точек пересечения графика функции с осью x. 
Промежутки знакопостоянства функции	**Промежутки знакопостоянства** – это промежутки, на которых функция сохраняет знак, то есть принимает только положительные (отрицательные) значения.	Решите неравенства $f(x)>0$ и $f(x)<0$.	Промежутки оси x, соответствующие частям графика, расположенным над осью x $\left(f(x)>0\right)$ и под осью x $\left(f(x)<0\right)$. 
Замечание. Промежутки знакопостоянства записываются в виде неравенств для переменной x или в виде объединения соответствующих числовых промежутков оси x.			
Промежутки возрастания функции	Функция называется **возрастающей на некотором промежутке**, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. **Возрастающей** называется функция, которая возрастает на всей области определения.	Найдите промежутки, в которых для любых x_1 и x_2 таких, что $x_1>x_2$, верно неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. Для этого можно исследовать знак разности $f(x_1)-f(x_2)$.	Промежутки оси x, соответствующие частям графика, «идущим вправо вверх». 

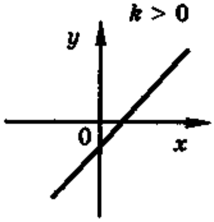
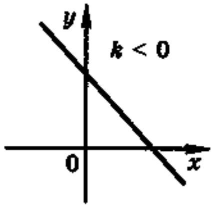
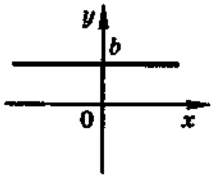
Промежутки убывания функции	Функция называется **убывающей на некотором промежутке**, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции. **Убывающей** называется функция, которая убывает на всей области определения.	Найдите промежутки, в которых для любых x_1 и x_2 таких, что $x_1 > x_2$, верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Для этого можно исследовать знак разности $f(x_1) - f(x_2)$.	Промежутки оси x, соответствующие частям графика, «идущим вправо вниз». 

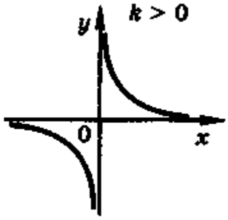
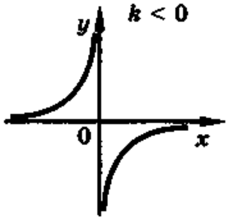
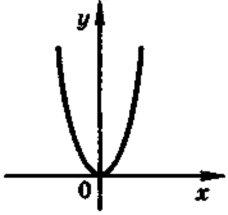
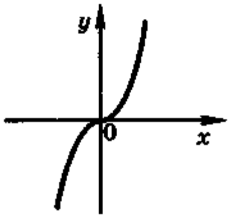
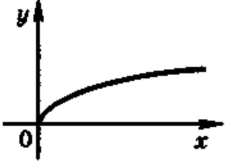
Замечания.
1) Промежутки возрастания (убывания) записываются перечислением соответствующих числовых промежутков (но не в виде объединения).
2) В своей области определения функция может возрастать на одних промежутках и убывать на других, а может не являться ни возрастающей, ни убывающей на промежутках, где ее значение постоянно.

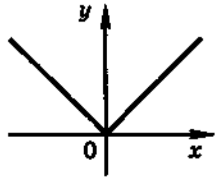
Типовое задание	*Найдите нули функции* $y = (x-1)\cdot(x^2 - 3x - 4)$. *Решение.*
Типовое задание	*Найдите промежутки знакопостоянства функции* $y = -\dfrac{5}{x-4}$. *Решение.*

Полезное задание	*Докажите (методом от противного), что возрастающая (или убывающая) функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента.*

Элементарные функции, их свойства и графики

Функция	Свойства функции	График
Линейная функция $y=kx+b$, $k\neq0$	1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 2. $E(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 3. Нули: $y=0$, если $x=-\dfrac{b}{k}$.	График – **прямая**, не перпендикулярная ни к одной из осей координат.
	$k>0$ 4. Промежутки знакопостоянства: $y>0$, если $x>-\dfrac{b}{k}$, $y<0$, если $x<-\dfrac{b}{k}$. 5. Функция возрастающая.	
	$k<0$ 4. Промежутки знакопостоянства: $y>0$, если $x<-\dfrac{b}{k}$, $y<0$, если $x>-\dfrac{b}{k}$. 5. Функция убывающая.	
Постоянная функция $y=b$ (частный случай линейной функции при $k=0$)	1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 2. $E(f)=\{b\}$. 3. Нули: если $b\neq0$, то нулей нет, если $b=0$, то $y=0$ при $x\in(-\infty;\ +\infty)$. 4. Промежутки знакопостоянства: если $b>0$, то $y>0$ при $x\in(-\infty;\ +\infty)$, если $b<0$, то $y<0$ при $x\in(-\infty;\ +\infty)$. 5. Функция постоянна при $x\in(-\infty;\ +\infty)$ (ни возрастающая, ни убывающая).	График – **прямая**, параллельная оси x или совпадающая с осью x. 

Обратная пропорциональность $y=\frac{k}{x}$, $k\neq0$	1. $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. 2. $E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. 3. Нули: нулей нет.	**График – гипербола.**
	$k>0$ 4. Промежутки знакопостоянства: $y>0$, если $x>0$, $y<0$, если $x<0$. 5. Функция убывает при $x\in(-\infty;\ 0)$ и при $x\in(0;\ +\infty)$.	
	$k<0$ 4. Промежутки знакопостоянства: $y>0$, если $x<0$, $y<0$, если $x>0$. 5. Функция возрастает при $x\in(-\infty;\ 0)$ и при $x\in(0;\ +\infty)$.	
$y=x^2$	1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 2. $E(f)=[0;\ +\infty)$. 3. Нули: $y=0$, если $x=0$. 4. Промежутки знакопостоянства: $y>0$, если $x\neq0$. 5. Функция убывает при $x\in(-\infty;\ 0]$ и возрастает при $x\in[0;\ +\infty)$.	**График – парабола.** 
$y=x^3$	1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 2. $E(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 3. Нули: $y=0$, если $x=0$. 4. Промежутки знакопостоянства: $y>0$, если $x>0$, $y<0$, если $x<0$. 5. Функция возрастающая.	**График – кубическая парабола.** 
$y=\sqrt{x}$	1. $D(f)=[0;\ +\infty)$. 2. $E(f)=[0;\ +\infty)$. 3. Нули: $y=0$, если $x=0$. 4. Промежутки знакопостоянства: $y>0$, если $x>0$. 5. Функция возрастающая.	**График – ветвь параболы.** 

$y = \lvert x \rvert$	**1.** $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. **2.** $E(f)=[0;\ +\infty)$. **3. Нули:** $y=0$**, если** $x=0$. **4. Промежутки знакопостоянства:** $y>0$**, если** $x\neq0$. **5. Функция убывает при** $x\in(-\infty;\ 0]$ **и возрастает при** $x\in[0;\ +\infty)$.	
Типовое задание	***Постройте графики функций и перечислите их свойства:*** *а)* $y=2x-4$; *б)* $y=\dfrac{4}{x}$. ***Решение.***	

Полезное задание	***Постройте графики функций $y=[x]$ (целая часть x) и $y=\{x\}$ (дробная часть x) и перечислите их свойства.***

Квадратный трехчлен

Квадратный трехчлен	**Определение**	**Пример**
	Квадратным трехчленом называется многочлен вида ax^2+bx+c, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.	x^2+2x-3
Дискриминант квадратного трехчлена	**Дискриминантом квадратного трехчлена называется выражение $D=b^2-4ac$.**	
Корни квадратного трехчлена	**Корнем квадратного трехчлена называется значение переменной, при котором значение этого трехчлена равно нулю. Для нахождения корней квадратного трехчлена надо решить уравнение $ax^2+bx+c=0$.**	
Выделение квадрата двучлена	**Выделением квадрата двучлена называется запись квадратного трехчлена в виде $a(x-m)^2+n$.**	
Типовое задание	***Найдите корни квадратного трехчлена:*** *а*) $2004x^2$; *б*) $25x^2-121$; *в*) $3x+18x^2$; *г*) $3x^2-x-2$;	

	д) $5x^2-10x+25$. ***Решение.***
Типовое задание	***Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:*** *а)* x^2-4x+6; *б)* x^2+5x-1; *в)* $3x^2+6x+3$. ***Решение.***
Типовое задание	***Докажите, что при любом x квадратный трехчлен:*** *а)* $x^2-8x+17$ ***принимает положительное значение;*** *б)* $30x-9x^2-25$ ***принимает неположительное значение.*** ***Решение.***

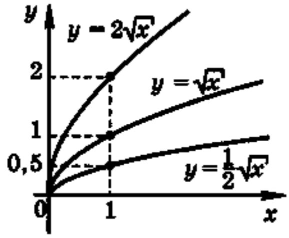
Типовое задание	*Определите, при каком значении x квадратный трехчлен* $\frac{1}{4}x^2-x+2$ *принимает наименьшее значение. Найдите это значение.* *Решение.*	
Разложение квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$	**Теорема**	**Доказательство**
	Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.	
	Если $x_1=x_2$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.	

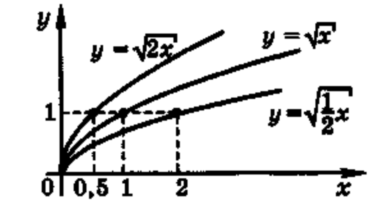
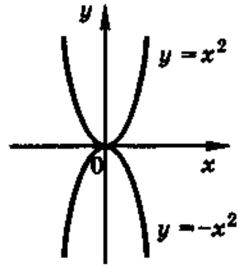
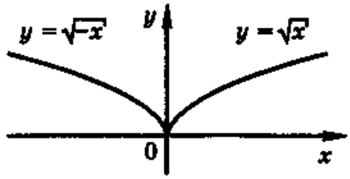
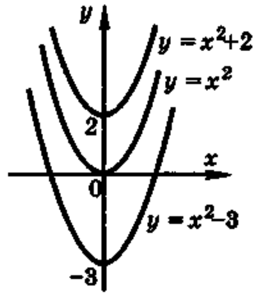
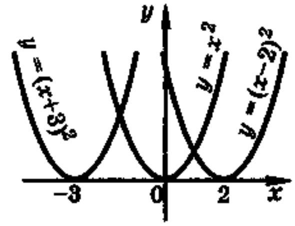
	Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.	
Типовое задание	*Разложите на множители трехчлен:* *а)* $x^2+2x-15$; *б)* $12x^2+2x-10$; *в)* $\frac{1}{16}x^2-x+4$; *г)* $4x^2-6x+9$. ***Решение.***	
Типовое задание	*Сократите дробь:* $\frac{6x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$. ***Решение.***	

Квадратичная функция и ее график

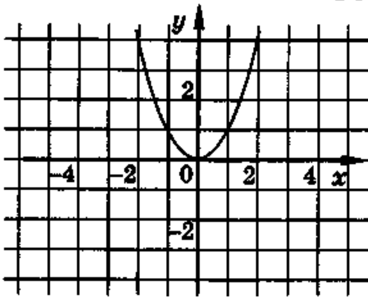
Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$	Определение	Пример
	Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где x – независимая переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a\neq0$.	
График квадратичной функции	График квадратичной функции – **парабола**. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, при $a<0$ — вниз. **Вершиной параболы** является точка $(m;\ n)$, где $m=-\dfrac{b}{2a}$; $n=-\dfrac{D}{4a}=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}$ (или $n=y(m)=am^2+bm+c$). **Осью симметрии параболы** является прямая $x=m$.	
Полезное задание	*Докажите, что если x_1 и x_2 – нули функции $y=ax^2+bx+c$, то абсцисса вершины параболы вычисляется по формуле* $m=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.	

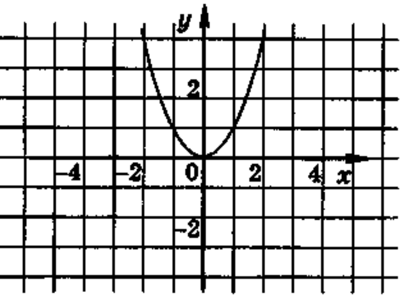
Элементарные преобразования графика функции

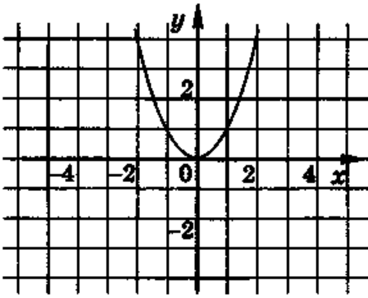
Функция	Схема построения	Пример
$y=af(x)$	1. Если $a>1$, растяните график функции $y=f(x)$ от оси x в a раз. 2. Если $0<a<1$, сожмите график функции $y=f(x)$ к оси x в $\dfrac{1}{a}$ раз.	

$y = f(\alpha x)$	1. Если $\alpha>1$, сожмите график функции $y=f(x)$ к оси y в α раз. 2. Если $0<\alpha<1$, растяните график функции $y=f(x)$ от оси y в $\frac{1}{\alpha}$ раз.	
$y=-f(x)$	Отразите график функции $y=f(x)$ симметрично относительно оси x.	
$y=f(-x)$	Отразите график функции $y=f(x)$ симметрично относительно оси y.	
$y=f(x)+n$	1. Если $n>0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси y на n единиц вверх. 2. Если $n<0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси y на $(-n)$ единиц вниз.	
$y=f(x-m)$	1. Если $m>0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси x на m единиц вправо. 2. Если $m<0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси x на $(-m)$ единиц влево.	
Типовое задание	*С помощью шаблона параболы $y = x^2$ постройте график функции:* *а)* $y = (x-4)^2$; *б)* $y = -x^2+4$; *в)* $y = 2x^2$; *г)* $y = (2x)^2$.	

Решение.







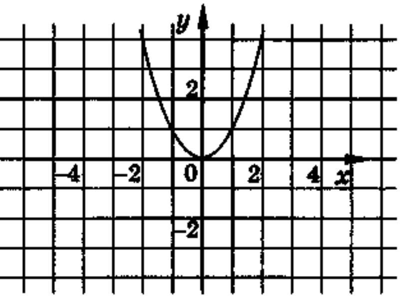
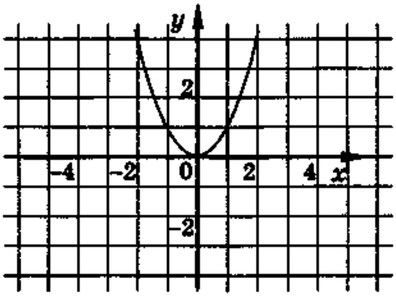
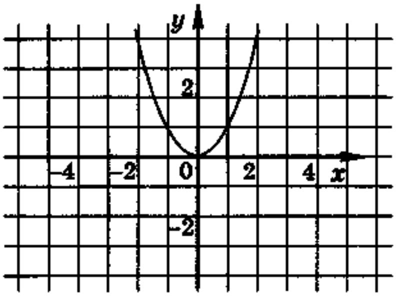
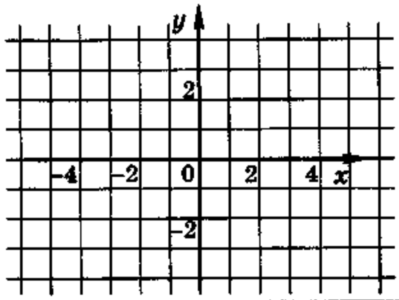
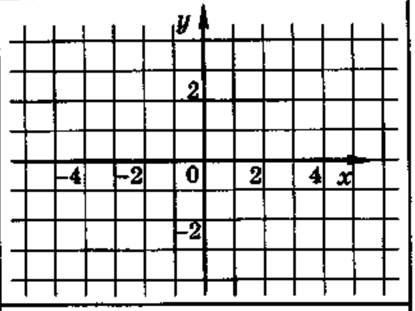


Схема построения графика квадратичной функции $y = ax^2+bx+c$ с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$

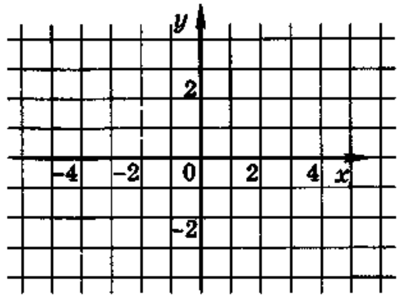
Этапы построения	Примеры	
	$y = 2x^2 + 4x - 1$	$y = -0,5x^2 + x + 3,5$
1. Запишите функцию в виде $y = a(x-m)^2 + n$, выделив полный квадрат двучлена.	$y = 2x^2 + 4x - 1 = 2(x+1)^2 - 3$	$y = -0,5x^2 + x + 3,5 =$ $= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4$
2. Постройте график функции $y=ax^2$ растяжением или сжатием графика функции $y=x^2$ вдоль оси y и симметричным отражением относительно оси x при $a<0$.		

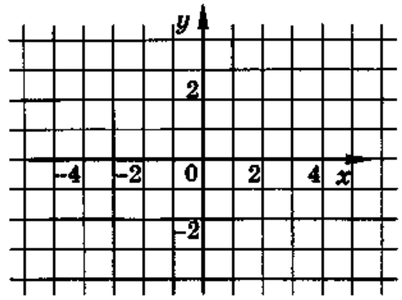
3. Постройте график функции $y=a(x-m)^2$ параллельным переносом графика функции $y=ax^2$ на $|m|$ вдоль оси x.





4. Постройте график функции $y=$ $= a(x-m)^2+n$ параллельным переносом графика функции $y=a(x-m)^2$ па $|n|$ вдоль оси y.





Типовое задание

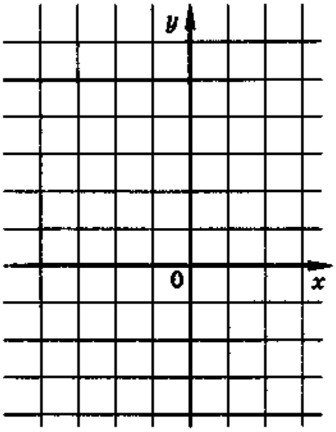
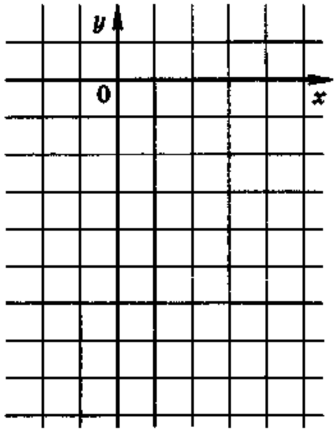
Постройте график функции:

а) $y=-x^2+2x-1$; *б)* $y=x^2+4x$; *в)* $y=0,5x^2-4$.

Решение.

Схема построения графика квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ по направлению ветвей и координатам вершины параболы

Этапы построения	Пример	
	$y = x^2 + 2x - 3$	$y = -2x^2 + 8x - 9$
1. Определите направление ветвей параболы по знаку коэффициента a.	$a=1>0$ – ветви параболы направлены вверх.	
2. Найдите координаты вершины параболы $(m; n)$ по формулам: $m=-\dfrac{b}{2a}$, $n=am^2+bm+c$.	$m = -\dfrac{2}{2} = -1$, $n=(-1)^2+2\cdot(-1)-3=-4$. Координаты вершины параболы – $(-1; -4)$.	
3. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет корни x_1 и x_2, то найдите координаты точек пересечения параболы с осью x: $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$.	$x^2 + 2x - 3 = 0$, $x_1=-3$, $x_2=1$. Координаты точек пересечения параболы с осью x: $(-3; 0)$ и $(1; 0)$.	

4. Найдите координаты точки пересечения параболы с осью y (0; c) и симметричную ей относительно оси параболы точку $\left(-\frac{b}{a};\ c\right)$.	$(0;\ c) = (0;\ -3)$, $\left(-\frac{b}{a};\ c\right) = (-2;\ -3)$.	
5. Найдите координаты еще нескольких точек, принадлежащих параболе (желательно симметричных относительно оси параболы).	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x & -4 & -2 & 0 & 2 \\ \hline y & 5 & -3 & -3 & 5 \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x & & & & \\ \hline y & & & & \end{array}$
6. Отметьте все полученные точки в системе координат и соедините их плавной линией.		

Типовое задание	***Постройте график функции:*** *а)* $y = (x+1)(x-3)$; *б)* $y = -2x^2 + 8x - 6$. ***Решение.***

Неравенства с одной переменной

Неравенствами второй степени с одной переменной называются неравенства видов $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a\neq 0$.

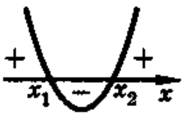
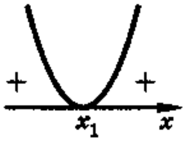
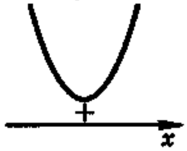
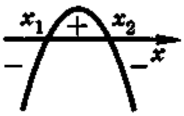
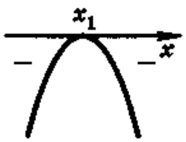
Расположение параболы $y=ax^2+bx+c$ относительно оси абсцисс	$a>0$, $D>0$ 	$a>0$, $D=0$ 	$a>0$, $D<0$ 
	$a<0$, $D>0$ 	$a<0$, $D=0$ 	$a<0$, $D<0$ 

Таблица решений[1] неравенств второй степени при $a>0$		
Вид неравенства / Знак D	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$
$D>0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
$D=0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$	$x\in R$
$D<0$	$x\in R$	$x\in R$
Вид неравенства / Знак D	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$D>0$	$x\in(x_1;x_2)$	$x\in[x_1;x_2]$
$D=0$	$x\in\varnothing$	$x=x_1$
$D<0$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$

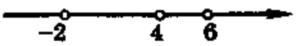
Схема решения неравенств второй степени		
Этапы решения	Примеры	
	$-x^2+8x-7\leq 0$	$2x^2+5x+3\leq 0$
1. Найдите корни квадратного трехчлена, если $D\geq 0$.		
2. Постройте схематически параболу, направленную ветвями вверх (если $a>0$) или вниз (если $a<0$): • не пересекающую ось x, если $D<0$, • касающуюся оси x, если $D=0$,		

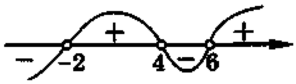
[1] Напомним, что $R=(-\infty;+\infty)$, а знак $\varnothing$ обозначает пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента.

• пересекающую ось x, если $D>0$, и отметьте корни на оси x, если они есть.		
3. Найдите на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены: • выше оси x (для неравенства $ax^2+bx+c>0$); • выше и на оси x (для неравенства $ax^2+bx+c\ge 0$); • ниже оси x (для неравенства $ax^2+bx+c<0$); • ниже и на оси x (для неравенства $ax^2+bx+c\le 0$).		
4. Запишите ответ.	***Ответ:***	***Ответ:***
Типовое задание	***Решите неравенство:*** *а)* $x^2-x-6>0$; *б)* $-x^2+8x-16\le 0$; *в)* $x^2-121<0$; *г)* $-2x^2+3x-34\ge 0$. ***Решение.***	

Типовое задание	***Докажите, что при любом x верно неравенство:*** *а)* $\frac{1}{4}x^2 - x + 16 \geq 0$; *б)* $5x - x^2 - 20 < 0$. ***Решение.***

Метод интервалов для решения неравенств, приводимых к виду $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0$ $(\geq 0;\ <0;\ \leq 0)$

Этапы решения	Пример	
	$(x+2)(x-4)(x-6)>0$	$(3x+6)(1-x)(2x-4)\geq 0$
1. Приведите неравенство к виду $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\times$ $\times\ldots\cdot(x-x_n)>0$ $(\geq 0;\ <0;\ \leq 0)$. **(см. замечание под таблицей).**	—	$3\cdot(-1)\cdot 2\cdot(x+2)(x-1)(x-2)\geq 0;$ $(-6)\cdot(x+2)(x-1)(x-2)\geq 0;$ $(x+2)(x-1)(x-2)\leq 0.$
2. Отметьте на координатной прямой нули функции $y=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\times$ $\times\ldots\cdot(x-x_n)$ **— точки** $x_1,\ \ldots,\ x_n$.		

3. Отметьте в крайнем справа интервале знак «+», а затем чередуйте знаки на образовавшихся промежутках, двигаясь по прямой справа налево.		
4. Запишите ответ, объединив промежутки, на которых функция имеет знак, соответствующий знаку неравенства. При этом рядом с нулями функции ставятся круглые скобки, если неравенство строгое, и квадратные, если — нестрогое.	*Ответ*: $(-2;\ 4)\cup(6;\ +\infty)$.	*Ответ*:

Замечание. **Чтобы неравенство вида $(a_1x+b_1)\cdot(a_2x+b_2)\cdot\ldots\cdot(a_nx+b_n)>0$ $(\geq 0;\ <0;\ \leq 0)$ привести к виду $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0$ $(\geq 0;\ <0;\ \leq 0)$, необходимо:**

- **вынести коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ за скобки: $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\left(x+\dfrac{b_1}{a_1}\right)\cdot\left(x+\dfrac{b_2}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x+\dfrac{b_n}{a_n}\right)$.**
- **разделить левую и правую части неравенства на множитель, равный произведению $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, и, если он отрицательный, поменять знак неравенства на противоположный.**

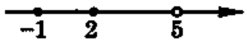
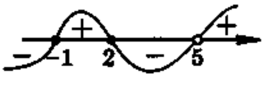
Типовое задание	***Решите неравенство:*** *а)* $(x+4)(x+3)(x-7)<0$; *б)* $(6-x)(9-x)(1-x)\leq 0$; *в)* $(3x-9)(15+5x)(18-3x)>0$; *г)* $x(x^2-8x+15)>0$. ***Решение.***

Метод интервалов для решения неравенств, приводимых к виду $\frac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot(x-b_2)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)}>0\ (<0)$

Этапы решения	Пример
	$\frac{(x+1)(2-x)}{(x-5)}>0$
1. Приведите неравенство к виду $\frac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot(x-b_2)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)}>0\ (<0)$.	$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-5)}<0$
2. Запишите неравенство, равносильное данному неравенству: $(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)(x-b_1)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)>0\ \ (<0)$.	$(x+1)(x-2)(x-5)<0$
3. Отметьте на координатной прямой нули функции $y=(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)(x-b_1)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)$.	
4. Отметьте в крайнем справа интервале знак «+», а затем чередуйте знаки на образовавшихся промежутках, двигаясь по прямой справа налево.	
5. Запишите ответ, объединив промежутки, в которых функция имеет знак, соответствующий знаку неравенства. При этом рядом с нулями функции ставятся круглые скобки.	*Ответ*: $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ 5)$.

Типовое задание	*Решите неравенство:* а) $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-5)}<0$; б) $\frac{(x+2)(4-8x)}{(7-21x)}>0$; в) $\frac{x^2-4x-12}{x^2-4x}>0$. ***Решение.***

Метод интервалов для решения неравенств, приводимых к виду $\frac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot(x-b_2)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)}\ge 0\ (\le 0)$

Этапы решения	Пример
	$\frac{(x+1)(2-x)}{(x-5)}\ge 0$
1. Приведите неравенство к виду $\frac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot(x-b_2)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)}\ge 0\ (\le 0)$.	$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-5)}\le 0$
2. Запишите систему, равносильную данному неравенству: $\begin{cases}(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)(x-b_1)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)\ge 0\ (\le 0),\\ x\ne b_1,\ b_2,\ldots,b_m.\end{cases}$	$\begin{cases}(x+1)(x-2)(x-5)\le 0,\\ x\ne 5\end{cases}$
3. Отметьте на координатной прямой нули функции $y=(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)\cdot(x-b_1)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)$, причем нули $a_1,\ldots,a_n$ жирной точкой, а нули $b_1,\ldots,b_m$ — «выколотой», так как они не принадлежат ОДЗ исходного неравенства.	
4. Отметьте в крайнем справа интервале знак «+», а затем чередуйте знаки между нулями функции, двигаясь по прямой справа налево.	
5. Запишите ответ, объединив промежутки, в которых функция имеет знак, соответствующий знаку неравенства. При этом рядом с нулями $a_1,\ldots,a_n$ ставятся квадратные скобки, а рядом с нулями $b_1,\ldots,b_m$ — круглые.	*Ответ*: $(-\infty;\ -1]\cup[2;\ 5)$.

Типовое задание	*Решите неравенство:* *а)* $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-5)}\le 0$; *б)* $\frac{(x+2)(4-8x)}{(7-21x)}\ge 0$; *в)* $\frac{x^2-4x-12}{x^2-4x}\ge 0$. ***Решение.***

Замечание. **Обобщенный метод интервалов для неравенств вида** $(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}>0$ $(\geq 0;\ <0;\ \leq 0)$ **и** $\dfrac{(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1}\cdot(x-b_2)^{p_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}}>0$ $(\geq 0;\ <0;\ \leq 0)$ **см. в приложении.**

Дополнительные сведения и задачи по теме

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Уравнения с одной переменной

	Определение	Пример
Целое уравнение	**Целыми уравнениями называются уравнения, у которых левая и правая части являются целыми выражениями.** Любое целое уравнение равносильно уравнению вида $P(x)=0$, где $P(x)$ – многочлен стандартного вида.	
Степень целого уравнения	**Степенью целого уравнения, записанного в виде $P(x)=0$, называется степень многочлена стандартного вида $P(x)$. Степенью произвольного целого уравнения называется степень равносильного ему уравнения вида $P(x)=0$, где $P(x)$ – многочлен стандартного вида.**	

Методы решения некоторых видов уравнений высших степеней

Метод замены переменной

Вид уравнения	Этапы решения	Пример
$ax^4+bx^2+c=0$, $a\neq0$ **(биквадратное уравнение)**	1. Сделайте замену переменной: $y=x^2$.	$x^4-8x^2-9=0$
	2. Решите уравнение $ay^2+by+c=0$.	
	3. Если $D>0$, то решите каждое из уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2=y_1, \\ x^2=y_2. \end{array}\right.$ Если $D=0$, то решите уравнение $x^2=y_1$.	

	Если $D<0$, то данное уравнение корней не имеет.	
	4. Запишите ответ.	*Ответ*:
$(ax^2+bx+c)\times$ $\times(ax^2+bx+d)=e$	1. Сделайте замену переменной: $y=ax^2+bx$.	$(x^2-x-7)(x^2-x-1)=-5$
	2. Решите уравнение $(y+c)(y+d)=e$.	
	3. Если $D>0$, то решите каждое из уравнений $\left[\begin{array}{l} ax^2+bx=y_1, \\ ax^2+bx=y_2. \end{array}\right.$ Если $D=0$, то решите уравнение $ax^2+bx=y_1$. Если $D<0$, то данное уравнение корней не имеет.	
	4. Запишите ответ.	*Ответ:*
$A(ax^2+bx+c)^2+$ $+B(ax^2+bx+d)+$ $+C=0$	1. Сделайте замену переменной: $y=ax^2+bx$.	$(2x^2+3x-1)^2-$ $-5(2x^2+3x-2)=1$
	2. Решите уравнение $A(y+c)^2+B(y+d)+C=0$.	
	3. Если $D>0$, решите каждое из уравнений $\left[\begin{array}{l} ax^2+bx=y_1, \\ ax^2+bx=y_2. \end{array}\right.$ Если $D=0$, то решите уравнение $ax^2+bx=y_1$. Если $D<0$, то данное уравнение корней не имеет.	

<table>
<tr><td></td><td>4. Запишите ответ.</td><td>Ответ:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Замечание. В двух последних типах уравнений иногда целесообразно выполнять замену $y = ax^2 + bx + c$ или $y = ax^2 + bx + d$.</td></tr>
<tr><td>Типовое задание</td><td colspan="2">Решите уравнения:
а) $16x^4-8x^2+1=0$;
б) $\left(x^2+2x-5\right)\left(x^2+2x-6\right)=6$;
в) $(x+1)^4-3x^2-6x-7=0$.

Решение.</td></tr>
</table>

Ответ: *а)* $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$; *б)* $-4; -3; 1; 2$; *в)* $-3; 1$.

Метод разложения на множители

Этапы решения	Пример
	$x^5 + 15x^2 + 4x - 12 = 3x^4 + 5x^3$;
1. Запишите уравнение в виде $f(x)=0$.	$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$;
2. Разложите $f(x)$ на множители.	$x^4(x-3) - 5x^2(x-3) + 4(x-3) = 0$; $(x^4 - 5x^2 + 4)(x-3) = 0$;
3. Приравняйте каждый из множителей к нулю и решите каждое из полученных уравнений.	
4. Запишите ответ.	*Ответ*:

Типовое задание

Решите уравнения методом разложения на множители:

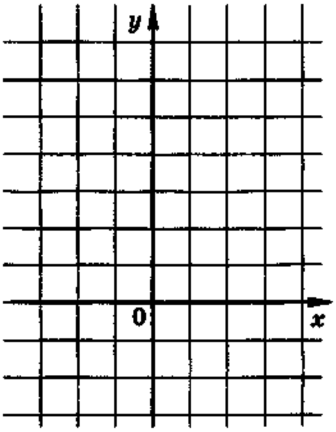
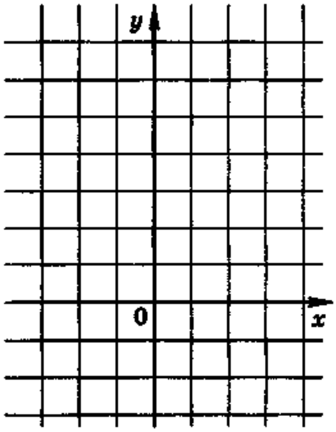
а) $x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 4x - 16 = 0$;

б) $2x^3 + 3 = 3x^2 + 2x$.

Решение.

	Ответ: *а*)−4; −2; 2; *б*)−1; 1; 1,5.

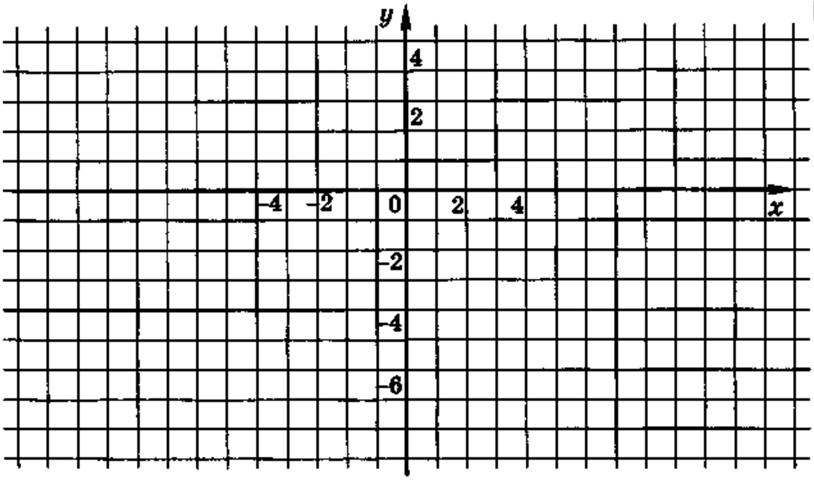
Графический метод решения уравнений вида $f(x)=g(x)$

<table>
<tr><th rowspan="2">Этапы решения</th><th colspan="2">Пример</th></tr>
<tr><th>$x^3 = 2 - x$</th><th>$x^3 + 3 = -2x$</th></tr>
<tr><td>1. Постройте график функции $y=f(x)$.</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>2. Постройте график функции $y=g(x)$ в той же системе координат.</td></tr>
<tr><td>3. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций; эти абсциссы являются решениями данного уравнения.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Запишите ответ.</td><td>Ответ:</td><td>Ответ:</td></tr>
</table>

Замечание. **Графический способ не обеспечивает высокую точность результата. Поэтому, если требуется, полученное значение корня уточняют подстановкой в условие.**

Системы уравнений с двумя переменными

Графический способ решения систем

Этапы решения	Пример
	$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=25,\\ y=x^2-4x-4.\end{cases}$
1. Постройте графики каждого уравнения системы.	
2. Найдите координаты общих точек этих графиков.	
3. Запишите ответ.	*Ответ:*

Замечание. Графический способ позволяет решить систему лишь **приближенно**, поэтому для получения точного ответа полученные решения следует проверить подстановкой в условие.

Типовое задание	*Решите графически систему уравнений:* $\begin{cases}xy=4,\\ 2y=x^2.\end{cases}$ ***Решение.***

	Ответ: (2; 2).

Аналитические способы решения систем[1]		
Способ подстановки		
Этапы решения	**Примеры**	
	$\begin{cases} 2xy + y^2 = 6, \\ 4x + y = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - 3x - 5y = 18, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$
1. Выразите из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую (получите подстановку).		
2. Подставьте в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение.		
3. Решите полученное уравнение с одной переменной.		

[1] Методы решения более сложных систем уравнений см. в приложении.

4. Найдите соответствующее значение второй переменной, используя подстановку.		
5. Запишите ответ.	***Ответ*: (1,25; −4), (−0,5; 3).**	***Ответ*: (−1,5;−2,25), (7; 2).**
Типовое задание	***Решите систему:*** *а)* $\begin{cases} x^2 - xy = 15, \\ x + 2y = 9; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x^2 - y^2 = 10, \\ x - y = 2. \end{cases}$ ***Решение.*** ***Ответ*: *а)* (−2; 5,5), (5; 2); *б)* (3,5; 1,5).**	

Способ сложения		
Этапы решения	**Примеры**	
	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 + y = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1, \\ x^2 + 2y^2 = 9. \end{cases}$
1. Умножьте одно или оба уравнения системы на некоторые числа, подобрав множители так, чтобы при сложении уравнений одна из переменных «исчезла».		
2. Сложите почленно полученные уравнения.		
3. Решите полученное уравнение с одной переменной.		
4. Найдите соответствующие значения второй переменной.		
5. Запишите ответ.	***Ответ*: (1; 2), (−1; 2), (2; −1), (−2; −1).**	***Ответ*: (1; 2), (1; −2), (−1; 2), (−1; −2).**
Типовое задание	***Решите систему уравнений:*** $\begin{cases} x - y + xy = 5, \\ x - y - xy = -7. \end{cases}$ ***Решение.***	

Ответ: (2; 3), (−3; −2).

Схема решения задач с помощью системы уравнений

Этапы решения	Примеры	
	Площадь прямоугольника равна 36 см². Если одну из сторон прямоугольника уменьшить на 2 см, а другую увеличить на 2 см, то площадь нового прямоугольника составит 42 см². Найдите периметр данного прямоугольника.	*Из двух городов, расстояние между которыми равно 600 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 6 часов. Найдите время, затраченное на весь путь каждым из них, если первый автомобиль прибыл в конечный пункт на 5 часов раньше, чем второй.*
1. Обозначьте некоторые неизвестные числа буквами.	Пусть длина прямоугольника равна x см, а ширина – y см. Тогда стороны нового прямоугольника будут равны $(x-2)$ см и $(y+2)$ см.	
2. Составьте систему уравнений, используя условие задачи.	По условию задачи площади прямоугольников равны 36 см² и 42 см². Составим систему уравнений: $\begin{cases} xy = 36, \\ (x-2)\cdot(y+2) = 42. \end{cases}$	
3. Решите систему.	$\begin{cases} xy = 36, \\ xy + 2x - 2y - 4 = 42; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 36, \\ 36 + 2x - 2y - 4 = 42; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 36, \\ x = y + 5; \end{cases}$ так как $x>0$, $y>0$, то $\begin{cases} x = 9, \\ y = 4. \end{cases}$	

4. Объясните полученный результат в соответствии с условием задачи и ответьте на вопрос задачи.	**Стороны данного прямоугольника равны 9 см и 4 см, а его периметр $P = (9 + 4) \cdot 2 = 26$ см.**	
5. Запишите ответ.	***Ответ*: 26 см.**	***Ответ:* 10 *часов*, 15 *часов*.**
Типовое задание	***Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно, за 2 часа. Первая труба, если она работает одна, может заполнить бассейн на 3 часа быстрее, чем одна вторая. За какое время может наполнить бассейн каждая труба, работая отдельно?*** ***Решение.*** ***Ответ:* 3 *часа*, 6 *часов*.**	

Дополнительные сведения и задачи по теме

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Последовательности

		Пример
Числовые последовательности	**Числовая последовательность x_1, x_2, x_3... считается заданной, если указан способ, позволяющий найти член последовательности x_n по его номеру n.** ***Обозначение*: числовая последовательность x_1, x_2, x_3... обозначается (x_n).**	
Способы задания последовательностей	**1) формулой n-го члена;**	$x_n = n^2 + 1$
	2) рекуррентной формулой, выражающей любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие;	$x_1 = 16$, $x_{n+1} = 0,5x_n$
	3) словесным описанием.	***(x_n) – последовательность двузначных чисел***
Типовое задание	***Выпишите первые семь членов последовательности (x_n), если x_1=1, x_2=1, x_{n+2}=x_{n+1}+x_n. (Эта последовательность называется последовательностью Фибоначчи).*** ***Решение.***	

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия	Определение и свойства	Пример
	Арифметической прогрессией называется последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Это число называется **разностью** арифметической прогрессии и обозначается d. Это значит, что для любого натурального n выполняется условие: $a_{n+1} = a_n + d$. Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать ее первый член a_1 и разность d.	
Формула разности арифметической прогрессии	$d = a_{n+1} - a_n$	*Дана арифметическая прогрессия* 14, 11, 8... . *Найдите ее разность.*
Формула n-го члена арифметической прогрессии	$a_n = a_1 + d(n-1)$	*Найдите седьмой член прогрессии.*
Типовая задача	*Последовательность* (a_n) — *арифметическая прогрессия. Найдите* a_{11}, *если* $a_6=5$ *и* $a_{16}=9$. *Являются ли членами этой прогрессии числа* 11 *и* 16?	

	Решение.	
Типовая задача	***Между числами 0,8 и 32 вставьте семь таких чисел, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию.*** *Решение.*	
Характеристическое свойство арифметической прогрессии	**Любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида** $a_n = kn + b$, **где k и b – некоторые числа.** **Верно и обратное: последовательность (a_n), заданная формулой вида** $a_n = kn + b$, **где k и b – некоторые числа, является арифметической прогрессией.**	*Доказательство.*

Замечание. Характеристическое свойство арифметической прогрессии иначе можно назвать необходимым и достаточным условием или критерием арифме-

тической прогрессии. Это означает, что каждый член арифметической прогрессии обладает таким свойством, и, наоборот, числовая последовательность, обладающая таким свойством, является арифметической прогрессией.	
Типовое задание	***Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 5n-2$.*** ***Решение.***
Полезное задание	***Докажите еще одно характеристическое свойство арифметической прогрессии.*** *Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:* $$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$ *И обратно: если числовая последовательность такова, что любой ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то такая последовательность является арифметической прогрессией. В связи с этим свойством и возникло название «арифметическая прогрессия».*
Полезное задание	*Докажите, что сумма двух членов конечной арифметической прогрессии, равноудаленных от крайних членов, равна сумме крайних членов:* $$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}.$$ ***Замечание.*** *Это свойство не является характеристическим, так как не верна обратная теорема. Так, последовательность 1, 2, 5, 6 не является арифметической прогрессией, хотя 1+6=2+5.*
Полезное задание	*Докажите формулы для арифметической прогрессии:* • $d = \frac{a_n - a_k}{n-k}$, *если* $n \ne k$ *(формула разности);* • $a_n = a_k + (n-k)d$ *(формула n-го члена);* • $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ *(формула n-го члена);* • $a_n + a_m = a_k + a_p$, *если* $n+m=k+p$.

Формулы суммы *n* первых членов арифметической прогрессии	**Сумма первых *n* первых членов арифметической прогрессии (a_n) вычисляется по формулам:** $$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}n \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$ *Доказательство.*
Типовое задание	***Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если $a_4=9$, $a_{15}=31$.*** *Решение.* *Ответ:* 120.
Типовое задание	***Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 240.*** *Решение.*

Ответ: 4920.

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия	Определение и свойства	Пример
	Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел (b_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число. Это число называется **знаменателем** геометрической прогрессии и обозначается q $(q \neq 0)$. Это значит, что для любого натурального n выполняется условие: $b_n \neq 0$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член b_1 и знаменатель q.	

Формула знаменателя геометрической прогрессии	$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$	*Дана геометрическая прогрессия −2, 6, −18....* *Найдите знаменатель прогрессии.*
Формула n-го члена геометрической прогрессии	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	*Найдите пятый член прогрессии.*
Типовая задача	*Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_2=-6$ и $b_4=-24$.* *Являются ли членами этой прогрессии числа 3 и −48?* *Решение.*	

Типовая задача	***Между числами 0,25 и 324 вставьте три таких числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.*** ***Решение.***
Полезное задание	***Докажите характеристическое свойство геометрической прогрессии:*** ***Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов:*** $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. ***Верно и обратное: если числовая последовательность такова, что квадрат любого ее члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, то такая последовательность является геометрической прогрессией.*** ***Замечание.*** *Формулу $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ можно записать так: $\lvert b_n \rvert = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, то есть $\lvert b_n \rvert$ является средним геометрическим b_{n-1} и b_{n+1}. В связи с этим свойством и возникло название «геометрическая прогрессия».*
Полезное задание	***Докажите, что произведение двух членов конечной геометрической прогрессии, равноудаленных от крайних членов, равно произведению крайних членов:*** $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}$. ***Замечание.*** *Это свойство не является характеристическим, так как не верна обратная теорема. Так, последовательность 1, 2, 5, 10 не является геометрической прогрессией, хотя 1·10 = 2·5.*
Полезное задание	***Докажите формулы для геометрической прогрессии:*** • $q^{n-k} = \dfrac{b_n}{b_k}$ ***если*** $n \neq k$ ***(формула знаменателя);***

	• $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$ *(формула n-го члена)*; • $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$ *(формула n-го члена)*; • $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$, *если* $n+m=k+p$.
Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии	**Если $q \neq 1$, то сумма первых n членов геометрической прогрессии (b_n) вычисляется по формулам:** $$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \text{ или } S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.$$ **Если $q=1$, то $S_n = nb_1$.** *Доказательство.*
Типовое задание	***Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_3=-9$ и $q=-3$.*** *Решение.* *Ответ:* **182.**

Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии	**Сумма бесконечной геометрической прогрессии (b_n), у которой $\lvert q\rvert < 1$, вычисляется по формуле** $$S = \frac{b_1}{1-q}.$$ *Доказательство.* ***Замечание.*** При $\lvert q\rvert \geq 1$ бесконечная геометрическая прогрессия конечной суммы не имеет.
Типовое задание	*Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии* $3\sqrt{3}$; -3; $\sqrt{3}$; ... . *Решение.* *Ответ*: $4{,}5 \cdot (\sqrt{3}-1)$.
Типовое задание	*Представьте бесконечную периодическую дробь* 0,(72) *в виде обыкновенной дроби.* *Решение.* *Ответ:* $\frac{8}{11}$.

Дополнительные сведения и задачи по теме

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенная функция

Четные и нечетные функции	**Определение и свойства**	**Пример**
	Функция $y=f(x)$ называется четной, если область ее определения симметрична относительно нуля и в ней для любого значения аргумента x верно равенство $f(-x) = f(x)$. График любой четной функции симметричен относительно оси ординат.	
	Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если область ее определения симметрична относительно нуля и в ней для любого значения аргумента x верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.	

Замечание. **Не всякая функция является четной или нечетной.**

Типовое задание

Определите, является ли четной или нечетной функция:

а) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 24$; *б*) $f(x) = -\dfrac{64}{x^7 + x}$; *в*) $f(x) = \dfrac{3x-1}{9x^2-1}$;

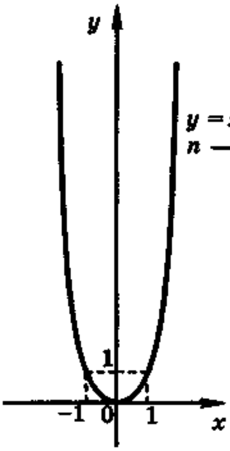
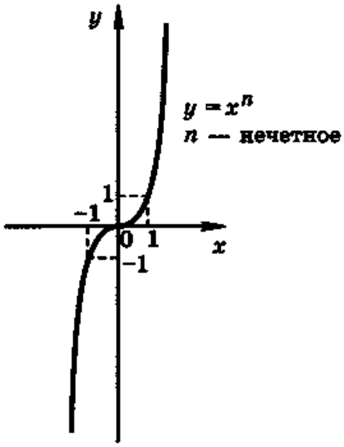
г) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-1}$.

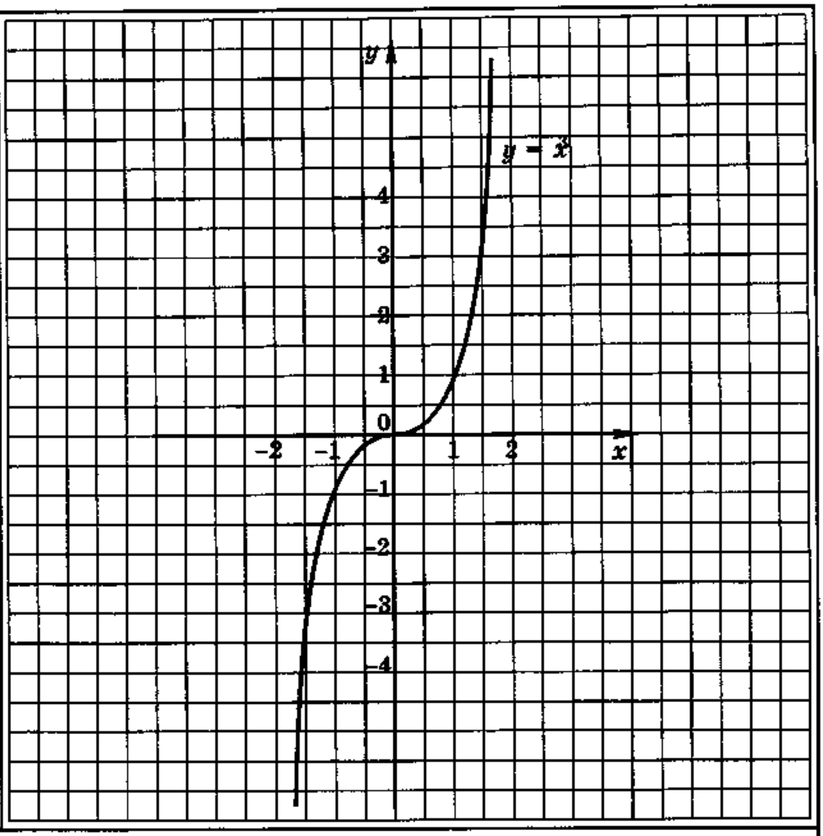
Решение.

Степенная функция $y=x^n$	**Определение**	**Пример**
	Степенной функцией с натуральным показателем называется функция, заданная формулой $y=x^n$, где x – независимая переменная, а n – натуральное число.	

Свойства степенной функции $y=x^n$

Свойство функции	n – четное число		n – нечетное число	
	Свойство функции $y=x^n$	**Особенности графика**	**Свойство функции $y=x^n$**	**Особенности графика**
1. Область определения.	$D(y) = (-\infty; +\infty)$.		$D(y) = (-\infty; +\infty)$.	
2. Нули.	Если $x=0$, то $y=0$.	Проходит через начало координат.	Если $x=0$, то $y=0$.	Проходит через начало координат.
3. Промежутки знакопостоянства.	Если $x\neq0$, то $y>0$.	График расположен в первой и второй координатных четвертях.	Если $x>0$, то $y>0$, если $x<0$, то $y<0$.	График расположен в первой и третьей координатных четвертях.
4. Четность, нечетность.	Функция четная.	График симметричен относительно оси ординат.	Функция нечетная.	График симметричен относительно начала координат.
5. Возрастание, убывание.	Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в промежутке $(-\infty; 0]$.	С возрастанием x график слева от начала координат опускается вниз, а справа – поднимается вверх.	Функция возрастает на всей области определения.	С возрастанием x график поднимается вверх.

6. Область значений.	$E(y) = [0; +\infty)$.	**График функции пересекает любая прямая $y=a$, если $a \geq 0$. Если же $a<0$, то прямая $y=a$ не пересекает график.**	$E(y) =$ $= (-\infty; +\infty)$.	**График функции пересекает любая прямая $y=a$.**
График функции				
Типовое задание	***Сравните:*** ***а***) $4{,}2^7$ ***и*** $3{,}2^7$; ***б***) $(-0{,}5)^8$ ***и*** $0{,}4^8$; ***в***) $(-1{,}02)^8$ ***и*** $\left(-1\frac{1}{49}\right)^8$. ***Решение.***			
Типовое задание	***Используя преобразование графика функции*** $y = x^3$, ***постройте график функции*** $y = 0{,}5(x-1)^3 - 2$. ***Решение.***			



Корень n-й степени ($n \in N$, $n \neq 1$) и его свойства

Определение корня n-й степени из числа	**Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.**

Свойство	Пример
n — нечетное Для любого числа a существует единственный корень n-й степени из a. ***Обозначение.*** $\sqrt[n]{a}$, где a – подкоренное выражение, n – показатель корня. Запись $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a.	

	***n*–четное** **1. Если $a>0$, то существует два противоположных корня *n*-й степени из *a*.** ***Обозначение*:** $\sqrt[n]{a}$ **– положительный корень,** $-\sqrt[n]{a}$ **– отрицательный корень.** **2. Если $a=0$, то существует один корень *n*-й степени из *a* и он равен нулю: $\sqrt[n]{0}=0$.** **3. Если $a<0$, то корня четной степени из *a* не существует.** **Запись $\sqrt[n]{a}$ в этом случае не имеет смысла.**	
Арифметический корень *n*-й степени	**Арифметическим корнем *n*-й степени из неотрицательного числа *a* называется неотрицательное число, *n*-я степень которого равна *a*.** ***Обозначение.* Арифметический корень *n*-й степени из *a* также обозначается $\sqrt[n]{a}$.**	
	Если $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, то $(\sqrt[n]{a})^n=a$. **При любом $a>0$ и нечетном *n*** $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.	
Типовое задание	***Вычислите:* *а*) $\sqrt[4]{0{,}0081}$; *б*) $4\cdot\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; *в*) $\sqrt[5]{-32}-\sqrt[3]{-0{,}001}$.** ***Решение.***	

Типовое задание	*Решите уравнения:* *а)* $x^5 = -0{,}00032$; *б)* $x^4 - 4 = 0$; *в)* $5x^3 + 45 = 0$. *Решение.*

Свойства арифметического корня n-й степени

Свойство (все показатели корней и степеней натуральные и больше единицы)	**Правило**	**Доказательство или пример**
Корень из произведения: если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.	Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней этих множителей.	
Корень из дроби: если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.	Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.	
Корень из корня: если $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.	Корень n-й степени из корня k-й степени из неотрицательного числа равен корню, показатель которого равен произведению показателей данных корней.	
Сокращение показателей: если $a \geq 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.	Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.	

Следствия из свойств	Правило	Доказательство или пример
Умножение корней: если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.	Чтобы перемножить два корня, надо перемножить подкоренные выражения и из полученного произведения извлечь корень.	
Деление корней: если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.	Чтобы разделить два корня, надо разделить подкоренные выражения и из полученного частного извлечь корень.	
Возведение корня в степень: если $a \geq 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.	Чтобы возвести корень в натуральную степень, надо возвести в эту степень подкоренное выражение и из полученного результата извлечь корень.	
Извлечение корня четной степени из той же степени $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$.	Корень четной степени из выражения, возведенного в ту же степень, равен модулю этого выражения.	
Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$, где n – четное, $b \geq 0$; $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, где n – нечетное.	
Внесение множителя под знак корня	Для четных n: $a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a \geq 0,\ b \geq 0), \\ -\sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a < 0,\ b \geq 0). \end{cases}$ Для нечетных n: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.	

Типовое задание	***Найдите значение выражения:*** а) $\sqrt[3]{0{,}027\cdot 8}+\sqrt[3]{-\dfrac{8}{0{,}125}}-\sqrt{\sqrt[3]{0{,}000001}}$; б) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{32}+\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}-\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$; в) $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}$. ***Решение.***
Типовое задание	***Сравните числа*** $\sqrt[3]{5}$ ***и*** $\sqrt[5]{3}$. ***Решение.***
Типовое задание	***Вынесите множитель из-под знака корня:*** а) $\sqrt[5]{32x^7}$; б) $\sqrt[4]{0{,}0016a^5}$, где $a>0$; в) $\sqrt[7]{128a^{16}b^8}$. ***Решение.***
Типовое задание	***Внесите множитель под знак корня:*** а) $2x^2\ \sqrt[5]{x}$; б) $-0{,}1a\ \sqrt[4]{3a^2}$, где $a>0$; в) $b\ \sqrt[3]{-a^2b^3}$. ***Решение.***

Степень с рациональным показателем и ее свойства

Степень с рациональным показателем	Определение	Пример
	Если $a>0$, $\frac{m}{n}$ – дробное число (m – целое, n – натуральное, $n\neq1$), то $$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$	
	Если $a=0$, то $a^{\frac{m}{n}}$ определяется только для $\frac{m}{n}>0$ (то есть m, n – натуральные): $$0^{\frac{m}{n}}=0.$$	
	Если $a<0$, то $a^{\frac{m}{n}}$ не определено.	

Типовое задание	***Замените степени с дробным показателем корнями:*** *а)* $3a^{-\frac{1}{3}}$; *б)* $(3a)^{-\frac{1}{3}}$; *в)* $4(a+b)^{\frac{1}{4}}$. ***Решение.***

Типовое задание	*Замените арифметические корни степенями с дробным показателем:* *а)* $\sqrt[8]{7^2}$; *б)* $\sqrt[8]{2a^{-4}}$; *в)* $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}$. *Решение.*

Свойства степеней с рациональным показателем

Действия со степенями	Формула Для любых $a>0$, $b>0$ и любых рациональных p и q	Пример
Умножение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} =$
Деление степеней	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$y^{\frac{1}{3}} : y^{\frac{2}{5}} =$
Возведение степени в степень	$(a^p)^q = a^{pq}$	$\left(z^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}} =$
Возведение в степень произведения	$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(m^{\frac{3}{4}} n^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} =$
Возведение в степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{9}{2}}}\right)^{\frac{8}{3}} =$

Степень с отрицательным рациональным показателем	$a^{-p}=\dfrac{1}{a^{p}}$	$a^{-\frac{2}{3}}=$
Типовое задание	***Вычислите:*** *а)* $9^{0,75}\cdot 81^{\frac{1}{4}}\cdot 27^{-\frac{1}{6}}$; *б)* $\left(2^{-\frac{1}{9}}\right)^{1,8}\cdot 4^{0,1}$; *в)* $\dfrac{4^{3n}\cdot 32^{n-4}}{16^{n-2}2^{7n-9}}$. ***Решение.***	

Преобразование выражений, содержащих степени с дробным показателем

К выражениям со степенями с дробным показателем можно применять все формулы сокращенного умножения и все приемы разложения на множители, которые применяются к степеням с целым показателем.

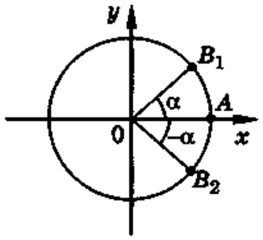
Формула	**Примеры**	
a^2-b^2	$a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2=$ $=\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$	$a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{2}{3}}=$
$(a-b)^2$	$\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2-2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=$ $=a^{\frac{4}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}+b$	$\left(a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{1}{[illegible]}}\right)^2=$

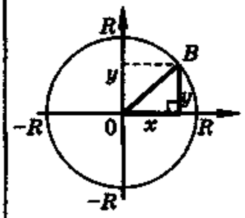
$(a+b)^2$	$\left(a^{\frac{1}{8}}+3\right)^2=\left(a^{\frac{1}{8}}\right)^2-2a^{\frac{1}{8}}\cdot 3+3^2=$ $=a^{\frac{1}{4}}-6a^{\frac{1}{8}}+9$	$\left(a^{\frac{1}{5}}+4\right)^2=$
a^3-b^3	$a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{9}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{6}}\right)^3=$ $=\left(a^{\frac{1}{9}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{2}{9}}+a^{\frac{1}{9}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$	$a^{\frac{2}{3}}-b=$
a^3+b^3	$a^{\frac{1}{4}}+1=\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^3+1^3=$ $=\left(a^{\frac{1}{12}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{1}{12}}+1\right)$	$a^{\frac{1}{2}}+2=$
Типовое задание	*Сократите дробь:* $\dfrac{x^{1,5}y-xy^{1,5}}{xy^{0,5}-x^{0,5}y}$. ***Решение.***	
Типовое задание	*Упростите выражение:* $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3}+\dfrac{a}{9-a}-\dfrac{3}{a^{\frac{1}{2}}+3}$. ***Решение.***	

Дополнительные сведения и задачи по теме

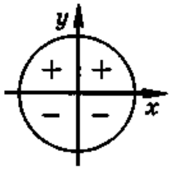
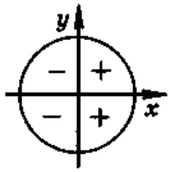
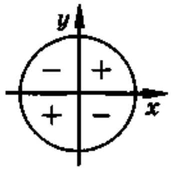
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Тригонометрические функции любого угла

Углы поворота	Определение	Пример
	Пусть при повороте около точки O начальный радиус OA переходит в радиус OB. **Положительный угол поворота** — это угол, который образуется при повороте OA против часовой стрелки. **Отрицательный угол поворота** — это угол, который образуется при повороте OA по часовой стрелке.	

Синус, косинус, тангенс и котангенс	Определение и свойства	Формула
	**Синусом** угла α называется отношение ординаты точки B к длине радиуса. Значения sinα определены при любом α, причем $-1 \le \sin\alpha \le 1$.	$\sin\alpha = \frac{y}{R}$
	Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки B к длине радиуса. Значения cosα определены при любом α, причем $-1 \le \cos\alpha \le 1$.	$\cos\alpha = \frac{x}{R}$
	Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки B к ее абсциссе. Значения tgα определены при любом α, кроме углов ±90°, ±270°, ±450°, ...	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$
	Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки B к ее ординате.	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$

	Значения $\mathrm{ctg}\,\alpha$ определены при любом α, кроме углов $0°$, $\pm180°$, $\pm360°$, ...	
Определение тригонометрических функций	Каждому допустимому значению α соответствует единственное значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, поэтому синус, косинус, тангенс и котангенс являются функциями угла α. Они называются **тригонометрическими функциями.**	
Типовое задание	*Укажите три значения угла α, при которых: а)* $\cos\alpha = 1$; *б)* $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *в)* $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$. *Решение.*	
Типовое задание	*Вычислите:* $4\sin 30° - 2\,\mathrm{tg}\,45° + 6\cos 30°\,\mathrm{ctg}\,60°$. *Решение.*	
Типовое задание	*Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения* $2\cos\alpha + 3$. *Решение.*	

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса	**Знаки синуса**	**Знаки косинуса**	**Знаки тангенса и котангенса**
			

Некоторые свойства тригонометрических функций[1]

Свойства	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
Область определения	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$	$x \neq \pm 90°, \pm 270°, \pm 450°, \ldots$	$x \neq 0°, \pm 180°, \pm 360°, \ldots$
Область значений	$[-1;\ +1]$	$[-1;\ +1]$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Четность, нечетность	нечетная: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	четная: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	нечетная: $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	нечетная: $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

При изменении угла на целое число оборотов значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются:

$$\sin(\alpha \pm 360° \cdot n) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha \pm 360° \cdot n) = \cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm 360° \cdot n) = \mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(\alpha \pm 360° \cdot n) = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$

где n – натуральное число.

Полезное задание	***Запишите формулы нулей и промежутки знакопостоянства тригонометрических функций.***

Радианная мера угла

Определение угла в один радиан	**Углом в один радиан называется центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности. Связь между градусными и радианными измерениями угла:** $1° = \frac{\pi}{180}$ **рад;** 1 **рад** $= \frac{180°}{\pi}$.

[1] Другие свойства тригонометрических функций будут изучены в 10 классе.

Перевод величин углов	Правило	Пример
	из градусной меры в радианную: $n^\circ = n \cdot \frac{\pi}{180}$ рад	
	из радианной меры в градусную: α рад $= \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$	

Значения тригонометрических функций некоторых углов

n°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

При изменении угла на целое число оборотов значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются:

$$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm 2\pi n) = \mathrm{tg}\,\alpha, \quad \mathrm{ctg}(\alpha \pm 2\pi n) = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$

где n – натуральное число.

Типовое задание	*Найдите значение выражения:* а) $\sin 405^\circ$; б) $\mathrm{tg}\,1260^\circ$; в) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; г) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{13\pi}{6}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$. *Решение.*

Основные тригонометрические формулы[1]

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

Основные тригонометрические тождества	1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; 5) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 6) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. *Доказательство.*

[1] Во всех формулах, приведенных в этом разделе, следует учитывать ОДЗ левой и правой частей формул.

Типовое задание	*Найдите значения тригонометрических функций угла* α, *если известно, что* $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ *и* $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. ***Решение.***
Типовое задание	*Упростите выражение:* $\cos^4\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + \sin^2\alpha$. ***Решение.***

Формулы приведения	
Формулы приведения	**Формулы приведения выражают тригонометрические функции углов вида $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ через функции угла α по следующим правилам:** • **функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол α является углом I четверти;** • **для углов $\pi\pm\alpha$ и $2\pi\pm\alpha$ название исходной функции сохраняется;** • **для углов $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ и $\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$ название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).**

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

Типовое задание

Упростите выражение: $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)$.

Решение.

Типовое задание

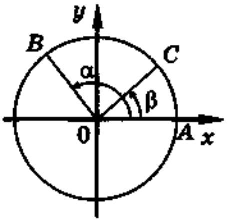
Найдите значение выражения:

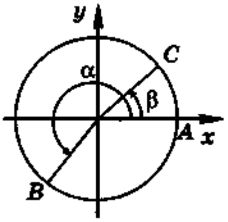
а) $\sin 225°$; *б*) $\cos(-240°)$; *в*) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; *г*) $\mathrm{ctg}\,\frac{13\pi}{4}$.

Решение.

Формулы сложения и их следствия

Формулы сложения





Формулы сложения выражают тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов.

Косинус разности	$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
Косинус суммы	$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
Синус разности	$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
Синус суммы	$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
Тангенс разности	$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
Тангенс суммы	$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Доказательство.

Типовое задание

Вычислите:

$$\frac{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \sin 69^\circ \sin 9^\circ}{\sin 44^\circ \cos 14^\circ - \cos 44^\circ \sin 14^\circ}.$$

	Решение.
Типовое задание	***Известно, что*** $\mathrm{tg}\,\alpha=3$, $\mathrm{tg}\,\beta=-2$. ***Найдите*** $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$. ***Решение.***
Полезное задание	***Докажите формулы котангенса разности и котангенса суммы:*** $$\mathrm{ctg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta};$$ $$\mathrm{ctg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}.$$
Полезное задание	***Докажите формулу:*** $$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$ ***где угол*** φ ***(вспомогательный угол) определяется из условий*** $$\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$ ***Доказательство см. в приложении.***

Формулы двойного угла

Формулы двойного угла	**Формулы этой группы выражают тригонометрические функции угла через тригонометрические функции половины этого угла.**	
	Синус двойного угла	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
	Косинус двойного угла	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
	Тангенс двойного угла	$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$
	Доказательство.	

Замечание. Часто формулы косинуса двойного угла записываются в виде

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

и называются **формулами понижения степени.**

Типовое задание	***Найдите значение выражения:*** $\dfrac{\sin 72^\circ}{2\sin 36^\circ} - \cos^2 18^\circ + \sin^2 18^\circ + \dfrac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$.

	Решение.
Типовое задание	***Упростите выражение: а)*** $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}$; *б)* $\cos^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. ***Решение.***
Полезное задание	***Докажите формулу котангенса двойного угла:*** $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.
Полезное задание	***Докажите формулы половинного угла:*** $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ ***(знак в формулах, содержащих корни, выбирается в зависимости от величины угла*** $\dfrac{\alpha}{2}$***).***

Полезное задание	***Докажите формулы тройного угла:*** $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$.
Полезное задание	***Докажите формулы, выражающие тригонометрические функции угла α через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (универсальная тригонометрическая подстановка):*** $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

Формулы суммы и разности

Формулы суммы и разности выражают сумму и разность тригонометрических функций через произведение тригонометрических функций от полусуммы и полуразности данных углов.

Сумма синусов	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
Разность синусов	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
Сумма косинусов	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
Разность косинусов	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Доказательство.

Типовое задание	***Представьте в виде произведения выражение:*** ***а***) $\sin 6\alpha - \sin 2\alpha$; ***б***) $\cos 4\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}$; ***в***) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x$. ***Решение.***

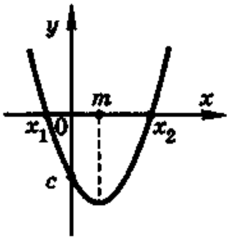
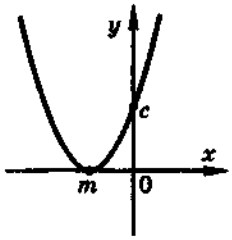
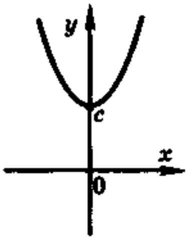
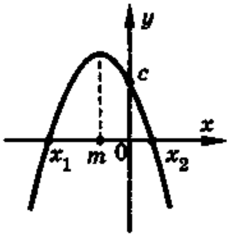
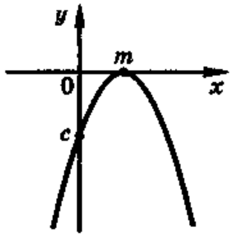
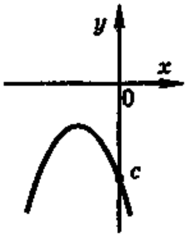
Типовое задание	*Докажите тождество:* $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha - tg\beta} = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$. ***Решение.***
Полезное задание	*Докажите формулы суммы и разности тангенсов:* $$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta};$$ $$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}.$$
Полезное задание	*Докажите формулы:* $$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$ $$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$
Полезное задание	*Докажите формулы преобразования произведения в сумму:* $$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$ $$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$ $$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Дополнительные сведения и задачи по теме

ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтение графика квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$

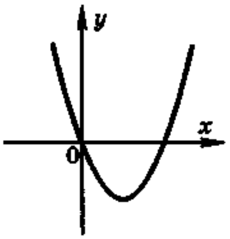
Число	Как определить знак
a	Знак определяется направлением ветвей параболы: – если ветви направлены вверх, то $a>0$; – если ветви направлены вниз, то $a<0$.
c	Знак определяется знаком ординаты точки $(0;\ c)$ – точки пересечения графика с осью y.
D – дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c	Знак определяется количеством точек пересечения параболы с осью x: – две точки пересечения – $D>0$; – одна точка пересечения – $D=0$; – нет точек пересечения – $D<0$.
b	Знак определяется направлением ветвей параболы и абсциссой ее вершины m в соответствии с формулой $m=-\dfrac{b}{2a}$: – если ветви направлены вниз, то знаки b и m совпадают; – если ветви направлены вверх, то знаки b и m противоположны.

Вид графика	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

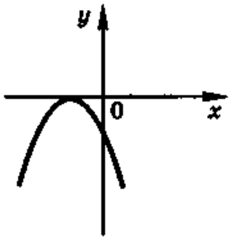
Типовое задание	*Для данных графиков квадратичных функций определите знаки чисел* a, b, c *и* D.

Решение.

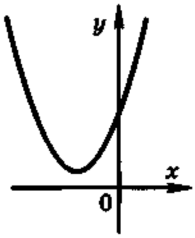
а)



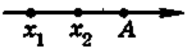
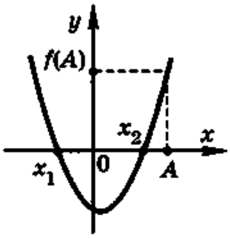
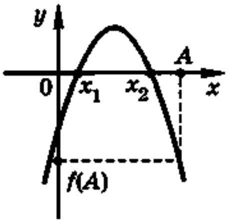
б)

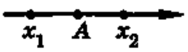
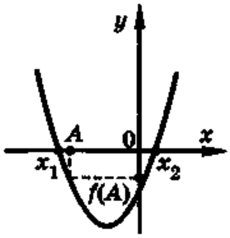
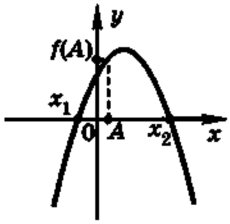
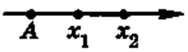
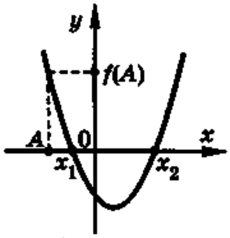
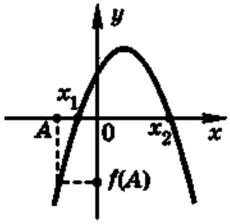


в)

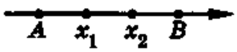
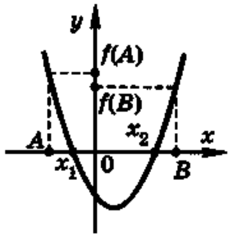
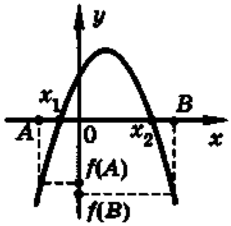


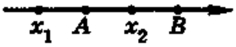
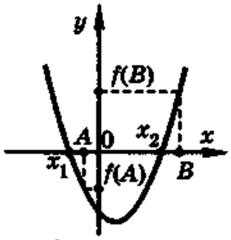
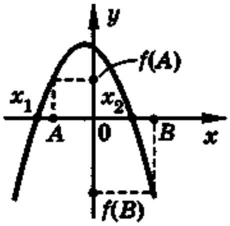
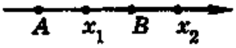
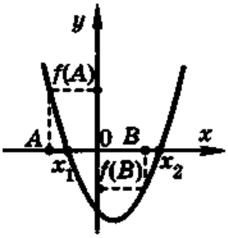
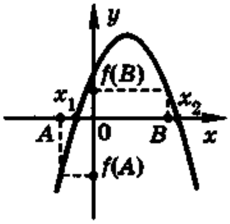
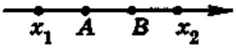
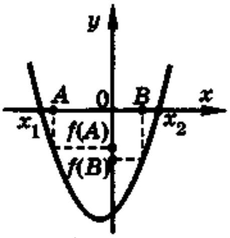
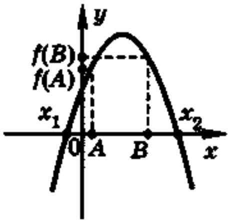
Условия расположения корней квадратного трехчлена относительно заданной точки

Расположение корней	Направление ветвей параболы: $a > 0$	Направление ветвей параболы: $a < 0$	Общий случай $a \neq 0$
$x_1 < x_2 < A$ 	 $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < A, \\ f(A) > 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < A, \\ f(A) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < A, \\ af(A) > 0 \end{cases}$

$x_1 < A < x_2$ 	 $f(A) < 0$	 $f(A) > 0$	$af(A) < 0$
$A < x_1 < x_2$ 	 $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > A, \\ f(A) > 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > A, \\ f(A) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > A, \\ af(A) > 0 \end{cases}$

Условия расположения корней квадратного трехчлена относительно двух заданных точек A и B

Расположение корней	Направление ветвей параболы		Общий случай $a \neq 0$
	$a > 0$	$a < 0$	
$A < x_1 < x_2 < B$ 	 $\begin{cases} D \geq 0, \\ A < -\dfrac{b}{2a} < B, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} D \geq 0, \\ A < -\dfrac{b}{2a} < B, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} D \geq 0, \\ A < -\dfrac{b}{2a} < B, \\ af(A) > 0, \\ af(B) > 0 \end{cases}$

$x_1 < A < x_2 < B$ 	 $\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) > 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} f(A) > 0, \\ f(B) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} af(A) < 0, \\ af(B) > 0 \end{cases}$
$A < x_1 < B < x_2$ 	 $\begin{cases} f(A) > 0, \\ f(B) < 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} af(A) > 0, \\ af(B) < 0 \end{cases}$
$x_1 < A < B < x_2$ 	 $\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) < 0 \end{cases}$	 $\begin{cases} f(A) > 0, \\ f(B) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} af(A) < 0, \\ af(B) < 0 \end{cases}$
Типовое задание	***При каком значении параметра а оба корня уравнения*** $x^2-(2a+1)x+4-a=0$ ***расположены между числами 1 и 3?*** ***Решение.***		

Ответ: $\frac{\sqrt{19}-2}{2} < a < \frac{4}{3}$.

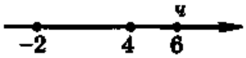
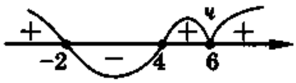
Обобщенный метод интервалов для решения неравенств

Определение кратности корня	**Число a называется корнем кратности k многочлена $F(x)$, если данный многочлен можно представить в виде $(x-a)^k f(x)$, где $f(x)$ – многочлен, не имеющий корня a.**	$F(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 4)$

	Иначе говоря, корень a имеет кратность k, если многочлен имеет ровно k корней, равных a.	

Метод интервалов для решения неравенств вида

$$(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}>0\ \ (\ge 0;\ \ <0;\ \ \le 0)$$

Этапы решения	Пример	
	$(x+2)^3(x-4)^7(x-6)^2>0$	$(3x+6)^2(1-x)^3(2x-4)^8\ge 0$
1. Приведите неравенство к виду $(x-x_1)^{k_1}\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}>0$ $(\ge 0;\ \ <0;\ \ \le 0)$ (см. замечание под таблицей).	–	$3^2\cdot(-1)^3\cdot 2^8\times$ $\times(x+2)^2(x-1)^3(x-2)^8\ge 0.$ Разделим неравенство на отрицательное выражение $3^2\cdot(-1)^3\cdot 2^8$ и поменяем знак неравенства на противоположный: $(x+2)^2(x-1)^3(x-2)^8\le 0.$
2. Отметьте на координатной прямой нули функции $y=(x-x_1)^{k_1}\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}$ и определите их кратность: если k_i четное, то нуль четной кратности, если k_i нечетное, то – нечетной.		
3. Отметьте в крайнем справа интервале знак «+», а затем расставьте знаки «+» или «–» на каждом из полученных промежутков, двигаясь по прямой справа налево, по правилу: при переходе через нуль *четной* кратности *знак не меняется*, а через нуль *нечетной – меняется на противоположный*.		
4. Запишите ответ, объединив промежутки, в которых функция имеет знак соответствующий	*Ответ:* $(-\infty;\ -2)\cup(4;\ 6)\cup(6;\ +\infty).$	*Ответ:* $(-\infty;\ 1]\cup\{2\}.$

знаку неравенства. При этом в нестрогих неравенствах в ответ включите все нули функции.		

Замечание. Чтобы привести неравенство вида $(a_1x+b_1)^{k_1}\cdot(a_2x+b_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(a_nx+b_n)^{k_n}>0$ $(\ge 0;\ <0;\ \le 0)$ к виду $(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}>0$ $(\ge 0;\ <0;\ \le 0)$, надо:

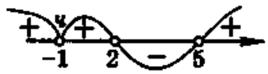
- вынести коэффициенты a_1, $a_2,\ldots$, a_n за скобки: $a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{k_n}\left(x+\frac{b_1}{a_1}\right)^{k_1}\cdot\left(x+\frac{b_2}{a_2}\right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(x+\frac{b_n}{a_n}\right)^{k_n}$;
- разделить левую и правую части неравенства на выражение $a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{k_n}$, и, если оно отрицательно, поменять знак неравенства на противоположный.

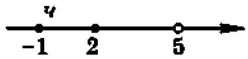
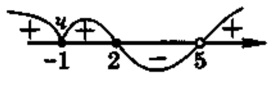
Типовое задание	***Решите неравенство:*** *а)* $(x+4)^2(x+3)^4(x-7)^9<0$; *б)* $(6-x)^5(9-x)^2(1-x)^3\le 0$; *в)* $(3x-9)^4(15+5x)^7(18-3x)^8\ge 0$; *г)* $x^2\left(x^2-8x+15\right)^4>0$. ***Решение.***

Метод интервалов для решения неравенств вида

$$\frac{(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1}\cdot(x-b_2)^{p_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}}>0\ (<0)$$

Этапы решения	Пример $\dfrac{(x+1)^2(2-x)^3}{(x-5)^5}<0$
1. Приведите неравенство к виду $\dfrac{(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1}\cdot(x-b_2)^{p_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}}>0\ (\ <0)$.	$-\dfrac{(x+1)^2(x-2)^3}{(x-5)^5}<0$ $\dfrac{(x+1)^2(x-2)^3}{(x-5)^5}>0$
2. Запишите неравенство, равносильное данному неравенству:	$(x+1)^2(x-2)^3(x-5)^5>0$

$(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}(x-b_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}>0\ (<0).$	
3. Решите неравенство по схеме, приведенной выше.	 $x\in(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$
4. Запишите ответ.	***Ответ:*** $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$.
Типовое задание	***Решите неравенство:*** *а)* $\dfrac{(x+2)^2(x-1)}{(x-5)^3}<0$; *б)* $\dfrac{(x-3)^2(4-8x)^4}{(21-7x)}>0$; *в)* $\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4x}>0$. ***Решение.*** ***Ответ:*** *а)* $(1;5)$; *б)* $(-\infty;0{,}5)\cup(0{,}5;3)$; *в)* $(-\infty;-2)\cup(0;4)\cup(6;+\infty)$.

Метод интервалов для решения неравенств вида $\dfrac{(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1}\cdot(x-b_2)^{p_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}}\ge 0\ (\le 0)$	
Этапы решения	**Пример** $\dfrac{(x+1)^2(2-x)^3}{(x-5)^5}\ge 0$
1. Приведите неравенство к виду $\dfrac{(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}{(x-b_1)^{p_1}\cdot(x-b_2)^{p_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}}\ge 0\ (\le 0)$.	$\dfrac{(x+1)^2(x-2)^3}{(x-5)^5}\le 0$
2. Запишите систему, равносильную данному неравенству: $\begin{cases}(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}(x-b_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}\ge 0\ (\le 0),\\ x\ne b_1,\ b_2,\ldots,\ b_m.\end{cases}$	$\begin{cases}(x+1)^2(x-2)^3(x-5)^5\le 0,\\ x\ne 5.\end{cases}$
3. Отметьте на координатной прямой нули функции $y=(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}(x-b_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{p_m}$, **причем нули** $a_1,\ldots,a_n$ **жирной точкой, а нули** $b_1,\ldots,b_m$ **— «выколотой», так как они не принадлежат ОДЗ исходного неравенства.**	
4. Отметьте в крайнем справа интервале знак «+», а затем расставьте знаки на каждом из полученных промежутков *с учетом кратности нулей функции*, двигаясь по прямой справа налево.	
5. Запишите ответ, объединив промежутки, в которых функция имеет знак, соответствующий знаку неравенства.	***Ответ*:** $\{-1\}\cup[2;\ 5)$
Типовое задание	***Решите неравенство:*** *а)* $\dfrac{(x+2)^2(x-1)^4}{(x-5)^{15}}\le 0$; *б)* $\dfrac{(x-3)^5(4-8x)^6}{(21-7x)^4}\ge 0$; *в)* $\dfrac{(x^2-2x-3)(x^2+4x+4)}{(x^2+2x-3)(x^2-8x+16)}\ge 0$.

Решение.

Ответ: ***а)*** $(-\infty;\ 5)$; ***б)*** $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (3;\ +\infty)$;

в) $(-\infty; -3) \cup \{-2\} \cup [-1; 1) \cup [3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Метод замены переменной при решении некоторых видов уравнений высших степеней

Уравнения вида
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e$, где $a+d=b+c$

Схема решения	Пример $(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)=36$
1. Перемножьте крайние скобки и средние скобки: $\left(x^2+(a+d)x+ad\right)\left(x^2+(b+c)x+bc\right)=e$.	Поскольку $-2+4=-1+3$, то $\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x-3\right)=36$.
2. Сделайте замену: $y=x^2+(a+d)x$.	$y=x^2+2x$
3. Решите уравнение $(y+ad)(y+bc)=e$.	$(y-8)(y-3)=36$ $y^2-11y-12=0$ $\left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=12. \end{array}\right.$
4. Если $D>0$, то решите совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2+(a+d)x=y_1, \\ x^2+(a+d)x=y_2. \end{array}\right.$ Если $D=0$, то решите уравнение $x^2+(a+d)x=y_1$. Если $D<0$, то данное уравнение корней не имеет.	$\left[\begin{array}{l} x^2+2x=-1, \\ x^2+2x=12; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+2x+1=0, \\ x^2+2x-12=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-1\pm\sqrt{13}. \end{array}\right.$
5. Запишите ответ.	*Ответ*: -1; $-1\pm\sqrt{13}$.

Типовое задание	*Решите уравнение* $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$.
	Решение.

	Ответ: −3; 2.

Уравнения вида

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=ex^2, \text{ где } ad=bc$$

Схема решения	Пример $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$
1. Перемножьте крайние скобки и средние скобки: $\left(x^2+(a+d)x+ad\right)\left(x^2+(b+c)x+bc\right)=ex^2$.	Поскольку $2\cdot 12=3\cdot 8$, то $\left(x^2+14x+24\right)\left(x^2+11x+24\right)=4x^2$.
2. Проверьте, является ли $x=0$ корнем уравнения.	$x=0$ не является корнем уравнения.
3. Вынесите из каждой скобки x: $x\left(x+(a+d)+\dfrac{ad}{x}\right)x\left(x+(b+c)+\dfrac{bc}{x}\right)=ex^2$.	$x\left(x+14+\dfrac{24}{x}\right)x\left(x+11+\dfrac{24}{x}\right)=4x^2$
4. Разделите левую и правую части уравнения на x^2: $\left(x+(a+d)+\dfrac{ad}{x}\right)\left(x+(b+c)+\dfrac{bc}{x}\right)=e$.	$\left(x+14+\dfrac{24}{x}\right)\left(x+11+\dfrac{24}{x}\right)=4$
5. Сделайте замену: $y=x+\dfrac{ad}{x}$.	$y=x+\dfrac{24}{x}$

6. Решите уравнение $(y+a+d)(y+b+c)=e$.	$(y+14)(y+11)=4;$ $y^2+25y+150=0;$ $\left[\begin{array}{l} y=-15, \\ y=-10; \end{array}\right.$
7. Если $D>0$, то решите совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{ad}{x}=y_1, \\ x+\dfrac{ad}{x}=y_2. \end{array}\right.$ Если $D=0$, то решите уравнение $x+\dfrac{ad}{x}=y_1$. Если $D<0$, то уравнение корней не имеет.	$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{24}{x}=-15, \\ x+\dfrac{24}{x}=-10; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+15x+24=0, \\ x^2+10x+24=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}, \\ x=-6, \\ x=-4. \end{array}\right.$
8. Запишите ответ.	*Ответ:* $\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$, -6, -4.

Типовое задание	*Решите уравнение* $(x-3)(x-1)(x+2)(x+6)+8x^2=0$. ***Решение.*** *Ответ:* -3; 2; $\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

Уравнения видов
$(x+a)^4+(x+b)^4=c$ и $(x+a)^5-(x+b)^5=c$

Схема решения	Пример $(x-1)^4+(x+3)^4=32$
1. Сделайте замену: $y=\frac{(x+a)+(x+b)}{2}=x+\frac{a+b}{2}$.	$y=\frac{(x-1)+(x+3)}{2}=x+1$. Отсюда $x=y-1$. $(y-2)^4+(y+2)^4=32$.
2. Раскройте скобки, приведите подобные слагаемые и решите полученное биквадратное уравнение.	$y^4+24y^2=0$; $y=0$.
3. Если биквадратное уравнение имеет корни (корень), подставьте их (его) в замену и решите полученные уравнения (уравнение).	$x=-1$.
4. Запишите ответ.	*Ответ*: -1.

Типовое задание *Решите уравнения:*

а) $(x-1)^4+(x-3)^4=82$; *б)* $(x-1)^5-(x-2)^5=31$.

Решение.

Ответ: *а*) 0; 4; *б*) 0; 3.

Симметрические уравнения

Определение симметрического уравнения	**Симметрическими** называются уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, $a_0 \neq 0$.	$2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 4x + 2 = 0$

Решение симметрических уравнений

Симметрические уравнения нечетной степени всегда имеют корень $x = -1$, поэтому их степень можно понизить делением на двучлен $x+1$.

Симметрическое уравнение третьей степени $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ можно решить, разложив его левую часть на множители и перейдя к совокупности уравнений:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,$$

$$a\left(x^3 + 1\right) + bx\left(x + 1\right) = 0,$$

$$\left(x + 1\right)\left(ax^2 + \left(b - a\right)x + a\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ ax^2 + \left(b - a\right)x + a = 0. \end{array}\right.$$

Симметрическое уравнение пятой степени $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + {}$ $+ bx + a = 0$ равносильно совокупности уравнений, второе уравнение которой – симметрическое уравнение четвертой степени:

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ ax^4 + \left(b - a\right)x^3 + \left(a - b + c\right)x^2 + \left(b - a\right)x + a = 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, решение уравнений нечетной степени сводится к решению уравнений четной степени, схема решения которых (на примере уравнения четвертой степени) приведена ниже.

Симметрические уравнения четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Схема решения	Пример $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0$
1. Убедитесь, что $x=0$ не является корнем уравнения (так будет, если $a \neq 0$).	$x=0$ не является корнем уравнения, так как $4 \neq 0$.

2. Разделите левую и правую части уравнения на x^2: $ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$.	$4x^2-8x+3-8\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x^2}=0$
3. Сгруппируйте слагаемые следующим образом: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$.	$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$
4. Сделайте замену: $y=x+\frac{1}{x}$. Возведите замену в квадрат: $y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$. Отсюда получите замену для суммы квадратов: $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$.	$y=x+\frac{1}{x}$; $y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$; $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$.
5. Выполните замену переменной и решите полученное уравнение: $a\left(y^2-2\right)+by+c=0$.	$4\left(y^2-2\right)-8y+3=0$; $4y^2-8y-5=0$; $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2}, \\ y=\frac{5}{2}. \end{array}\right.$
6. Если уравнение имеет корни (корень), подставьте их (его) в замену и решите полученные уравнения (уравнение).	$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}, \\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x^2+x+2=0 \quad (D<0), \\ x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2; \\ x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$
7. Запишите ответ.	*Ответ*: 2; $\frac{1}{2}$.

Замечание. **Возвратными** называются уравнения вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+k^{n-1}a_1x+k^na_0=$ $=0$, $a_0\neq0$. Например: $2x^4+4x^3+7x^2+12x+18=0$ — возвратное уравнение, так как его можно записать в виде $2x^4+4x^3+7x^2+3\cdot4x+3^2\cdot2=0$
При $k=1$ возвратное уравнение является симметрическим.
При $k=-1$ уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$ решаются с помощью замены $y=x-\frac{1}{x}$.
Решение возвратных уравнений аналогично решению симметрических уравнений.

Типовое задание	*Решите уравнение* $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$. ***Решение.*** *Ответ*: $2; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}$.

Однородные уравнения вида
$af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0$

Схема решения	**Пример** $(x-1)^2-(x^2-1)^2-2(x+1)^2=0$
1. Проверьте, являются ли корни уравнения $g(x)=0$ корнями данного уравнения.	$(x-1)^2-(x-1)^2(x+1)^2-2(x+1)^2=0$ В данном уравнении $g(x)=x+1$. $x=-1$ не является корнем данного уравнения, так как $(-1-1)^2-(1-1)^2-2(-1+1)^2\neq 0$.
2. Разделите левую и правую части уравнения на $g^2(x)$: $a\frac{f^2(x)}{g^2(x)}+b\frac{f(x)}{g(x)}+c=0$.	Разделим левую и правую части уравнения на $(x+1)^2$: $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-2=0$.

3. Сделайте замену $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.	**Пусть** $y = \frac{x-1}{x+1}$, **тогда** $y^2 - y - 2 = 0$.
4. Решите полученное уравнение.	$\left[\begin{array}{l} y = -1, \\ y = 2. \end{array}\right.$
5. Если уравнение имеет корни (корень), подставьте их (его) в замену и решите получившиеся уравнения (уравнение).	$\left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = -1, \\ \frac{x-1}{x+1} = 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x-1 = -x-1, \\ x-1 = 2x+2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3. \end{array}\right.$
6. Запишите ответ, объединив корни из п.1 (если они есть) и п.5.	***Ответ***: **−3; 0.**

Замечание. **Однородные уравнения более высоких степеней** $a_0 f^n(x) + a_1 f^{n-1}(x) g(x) + a_2 f^{n-2}(x) g^2(x) + \ldots + a_{n-1} f(x) g^{n-1}(x) + a_n g^n(x) = 0$ **решаются аналогично.**

Типовое задание	***Решите уравнение:*** $7(x-1)^2 + 13(x^3-1) = 2(x^2+x+1)^2$. ***Решение.*** ***Ответ***: **−1; −0,5; 2; 4.**

Методы решения некоторых видов дробных рациональных уравнений

Метод замены переменной в дробных рациональных уравнениях

Схема решения на примере $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{4x}{x^2-12x+15}$	Пример $\dfrac{x^2-3x+1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-2x+1}=\dfrac{7}{2}$
1. Проверкой убеждаемся, что $x=0$ не является корнем уравнения. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x: $$\frac{x-10+\frac{15}{x}}{x-6+\frac{15}{x}}=\frac{4}{x-12+\frac{15}{x}}.$$	
2. Выполним замену: $y=x+\dfrac{15}{x}$. Тогда $$\frac{y-10}{y-6}=\frac{4}{y-12}.$$	
3. Решим получившееся уравнение: $$\begin{cases}(y-10)(y-12)=4(y-6),\\ y\neq 6,\\ y\neq 12;\end{cases}$$ $$\begin{cases}y^2-26y+144=0,\\ y\neq 6,\\ y\neq 12;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=8,\\ y=18,\end{array}\right.\\ y\neq 6,\\ y\neq 12;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}y=8,\\ y=18.\end{array}\right.$$	
4. Подставим найденные значения в уравнение замены: $$\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{15}{x}=8,\\ x+\dfrac{15}{x}=18;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x^2-8x+15=0,\\ x^2-18x+15=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=5,\\ x=9\pm\sqrt{66}.\end{array}\right.$$	
5. *Ответ*: 3; 5; $9\pm\sqrt{66}$.	*Ответ*: 2; 0,5; $3\pm 2\sqrt{2}$.

<table>
<tr><td>Типовое задание</td><td>Решите уравнение $\frac{2x}{x^2-2x+5}+\frac{3x}{x^2+2x+5}=\frac{7}{8}$.
Решение.

Ответ: 1; 5.</td></tr>
</table>

Метод дополнения до полного квадрата

Некоторые уравнения вида $f^2(x)+g^2(x)=A$ удается решить дополнением левой части до полного квадрата: $\left(f^2(x)+g^2(x)\pm 2f(x)g(x)\right)\mp 2f(x)g(x)=A$.

Схема решения на примере $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$	Пример $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{10}{9}$
1. Дополним левую часть уравнения до полного квадрата: $\underbrace{x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{x}{x-1}}_{\text{полный квадрат}}-2\cdot x\cdot\frac{x}{x-1}=8;$ $\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8=0;$ $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8=0.$	

2. Сделаем замену: $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. Получим уравнение: $y^2 - 2y - 8 = 0$.	
3. По теореме, обратной теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} y = -2, \\ y = 4. \end{array}\right.$	
4. Подставим найденные значения в уравнение замены: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x-1} = -2, \\ \dfrac{x^2}{x-1} = 4; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 2 = 0, \\ x^2 - 4x + 4 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq 1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{3}, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x \neq 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{3}, \\ x = 2. \end{array}\right.$	
5. *Ответ*: 2; $-1 \pm \sqrt{3}$.	*Ответ*: $-0{,}5$; $0{,}5$.

Типовое задание	***Решите уравнение*** $x^2 + \dfrac{x^2}{(1+x)^2} = 3$. ***Решение.***

Указание. Выделите квадрат разности. Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Методы решения систем нелинейных уравнений

Переход от системы, содержащей совокупность уравнений, к совокупности систем уравнений

Если одно из уравнений системы $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ можно представить в виде $f(x,y)=f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\cdot\ldots\cdot f_n(x,y)=0$, то для этой системы справедлива следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y)\cdot\ldots\cdot f_n(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f_1(x,y)=0, \\ \ldots \\ f_n(x,y)=0, \end{array}\right. \\ g(x,y)=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases} \\ \ldots \\ \begin{cases} f_n(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

На этом основан метод разложения на множители при решении систем.

Метод разложения на множители при решении систем

Схема решения	Пример $\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7, \\ x(2y-x)=x \end{cases}$
1. Представьте одно из уравнений системы $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ в виде $f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\cdot\ldots\cdot f_n(x,y)=0$.	$\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7, \\ x(2y-x)-x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7, \\ x(2y-x-1)=0; \end{cases}$

2. Составьте совокупность систем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(x,y)=0,\\ g(x,y)=0;\end{cases}\\ \ldots\\ \begin{cases} f_n(x,y)=0,\\ g(x,y)=0,\end{cases}\end{array}\right.$ **где $g(x,y)=0$ — второе уравнение системы.**	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7,\\ 2y-x-1=0;\end{cases}\\ \begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7,\\ x=0;\end{cases}\end{array}\right.$
3. Решите совокупность полученных систем способом подстановки.	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7,\\ x=2y-1;\end{cases}\\ \begin{cases} x^2-2xy+4y^2=7,\\ x=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2y^2-y-3=0,\\ x=2y-1;\end{cases}\\ \begin{cases} 4y^2=7,\\ x=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-1,\\ y=1,5,\end{array}\right.\\ x=2y-1;\end{cases}\\ \begin{cases} y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2},\\ x=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=-1,\\ x=-3;\end{cases}\\ \begin{cases} y=1,5,\\ x=2;\end{cases}\\ \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{7}}{2},\\ x=0;\end{cases}\\ \begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{7}}{2},\\ x=0.\end{cases}\end{array}\right.$
4. Запишите ответ.	***Ответ:*** $(-3;-1),\ (1,5;\ 2),\ \left(0;\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(0;-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right).$
Типовое задание	***Решите систему:*** $\begin{cases} x^2+2y^2-3x=12,\\ xy+2x-2y-4=0.\end{cases}$ ***Решение.***

	Ответ: $(2;\ \sqrt{7}), (2; -\sqrt{7}), (4; -2), (-1; -2)$.

Системы уравнений, левые части которых — однородные многочлены:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

Схема решения	**Пример**
1-ый способ	$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = -1, \\ x^2 + xy - 4y^2 = 2 \end{cases}$
1. Сделайте подстановку $y=tx$, где $t\in\boldsymbol{R}$.	Пусть $y=tx$, где $t\in\boldsymbol{R}$, $t\neq 0$. Тогда $\begin{cases} x^2 - 2tx^2 - t^2x^2 = -1, \\ x^2 + tx^2 - 4t^2x^2 = 2. \end{cases}$
2. Если $d_2\neq 0$, то разделите левую и правую части первого уравнения на соответствующие части второго уравнения.	$\dfrac{1-2t-t^2}{1+t-4t^2} = -\dfrac{1}{2}$;
3. Решите полученное уравнение.	$\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$
4. Если $D\geq 0$, то подставьте полученные корни t_1 и t_2 (корень t_1) в выражение $y=tx$.	$y=-x$ или $y=\dfrac{1}{2}x$

5. Замените в исходной системе одно из уравнений на эти (это) выражения (выражение). В результате получите совокупность систем (или систему), равносильную данной.	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2xy-y^2=-1,\\ y=-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2xy-y^2=-1,\\ y=\dfrac{1}{2}x;\end{cases}\end{array}\right.$
6. Решите полученную совокупность систем (систему).	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x^2-x^2=-1,\\ y=-x;\end{cases} \text{– решений нет}\\ \begin{cases}x^2-x^2-\dfrac{1}{4}x^2=-1,\\ y=\dfrac{1}{2}x;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2=4,\\ y=\dfrac{1}{2}x;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2,\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$
7. Запишите ответ.	*Ответ*: $(2;\ 1),\ (-2;\ -1)$.
2-ой способ	$\begin{cases}x^2-2xy-y^2=-1,\\ x^2+xy-4y^2=2\end{cases}$
1. Умножьте каждое из уравнений системы на множители, подобранные так, чтобы в правых частях уравнений получились противоположные числа.	
2. Сложите уравнения системы. В результате получите однородное уравнение.	
3. Попытайтесь решить это однородное уравнение вынесением за скобки общего множителя. Если это невозможно, то разделите обе части уравнения на квадрат одной из переменных и решите полученное уравнение как квадратное относительно $\dfrac{x}{y}$ (или $\dfrac{y}{x}$). В результате, если $D \ge 0$, получите одно или два выражения x через y (или y через x).	

4. Замените в исходной системе одно из уравнений на эти (это) выражения (выражение). В результате получите совокупность систем (или систему), равносильную данной.	
5. Решите эту совокупность систем (систему).	
6. Запишите ответ.	

Типовое задание	***Решите двумя способами систему:*** $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 28, \\ 3x^2 - 3xy - y^2 = -28. \end{cases}$ ***Решение.***

	Ответ: (2; 4), (−2; −4).

Симметрические системы уравнений

Определение и метод решения симметрических систем	**Симметрическими системами двух уравнений с двумя неизвестными x и y называются системы, которые не меняются при замене y на x и x на y. Для решения таких систем иногда удобно делать замену $u=x+y$ и $v=xy$.**
Схема решения	**Пример** $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$
1. Подготовьте систему к замене, представив левые части уравнений в виде функций от $x+y$ и xy.	$\begin{cases} x+y+xy=5, \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$
2. Сделайте замену $u=x+y$ и $v=xy$.	**Пусть $u=x+y$ и $v=xy$.**
3. Решите полученную систему.	$\begin{cases} u+v=5, \\ u^2-v=7; \end{cases}$ $\begin{cases} v=5-u, \\ u^2+u-12=0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-4, \\ v=9; \end{cases} \\ \begin{cases} u=3, \\ v=2; \end{cases} \end{array}\right.$

4. Подставьте найденные значения u и v в уравнения замены и решите новые системы (систему).	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-4,\\ xy=9;\end{cases} \text{– решений нет}\\ \begin{cases}x+y=3,\\ xy=2;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$
5. Запишите ответ.	***Ответ:*** $(1;\ 2),(2;\ 1)$.

Замечание. **Для симметрических систем с тремя переменными x, y и z используются замены $u=x+y+z$, $v=xy+yz+zx$, $w=xyz$.**

Типовое задание	***Решите систему:*** $\begin{cases}x-xy+y=1,\\ x^2+y^2+2x+2y=11.\end{cases}$ ***Решение.*** ***Ответ:*** **(2; 1), (1; 2), (–4; 1), (1;–4).**

Метод деления при решении систем уравнений

Схема решения	$\begin{cases}x^2-xy+y^2=3,\\ x^3+y^3=9\end{cases}$	$\begin{cases}(x+y)xy=30,\\ x^3+y^3=35\end{cases}$
1. Подготовьте систему к делению, разложив левые части уравнений на множители.	$\begin{cases}x^2-xy+y^2=3,\\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=9.\end{cases}$	

2. Разделите одно уравнение системы на другое[1] и замените одно из уравнений системы полученным частным.	$\begin{cases}(x+y)^2-3xy=3,\\ x+y=3;\end{cases}$	
3. Решите полученную систему.	$\begin{cases}xy=2,\\ x+y=3;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$.	*Ответ*: (2; 3), (3; 2).

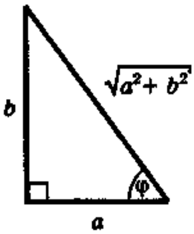
Дополнительные тригонометрические преобразования

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму	$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big)$$ $$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big)$$ $$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\big(\sin(x-y)+\sin(x+y)\big)$$ *Доказательство.*

[1] Такую операцию можно выполнять только в случае, когда деление выполняется на выражение, заведомо не равное нулю.

Типовое задание	*Представьте в виде суммы произведение:* $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$. ***Решение.***
Типовое задание	*Упростите выражение:* $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\ldots+\sin10\alpha$. ***Решение.*** *Указание. Домножьте и разделите данное выражение на* $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Применение метода вспомогательного угла при упрощении выражений	*Упростите выражение:* $a\sin\alpha \pm b\cos\alpha$.
1. Умножьте и разделите данное выражение на $\sqrt{a^2+b^2}$. Это выражение называют нормирующим множителем (или нормирующим делителем).	$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha =$ $=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$

2. Рассмотрите прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой $\sqrt{a^2+b^2}$. Выражения $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ являются синусом и косинусом острого угла φ этого треугольника. Таким образом, $\begin{cases}\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$	 Пусть угол φ определяется из условий $\begin{cases}\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$
3. Примените формулу синуса (косинуса) суммы или разности.	Тогда $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)=$ $=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi).$
Типовое задание	***Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:*** *а*) $\sin x-\sqrt{3}\cos x$; *б*) $4\sin x-3\cos x$. ***Решение.***

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7-9 КЛАССОВ

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Разность квадратов	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Сумма кубов	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Разность кубов	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Куб суммы	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Куб разности	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^2$
Разность n-х степеней	$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c

Формула корней	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$
Разложение на множители	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, если $D\geq 0$
Теорема Виета	x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
$a_{n+1}=a_n+d$, где d — разность прогрессии	$b_{n+1}=b_n\cdot q$, где q — знаменатель прогрессии ($b_1\neq 0$, $q\neq 0$)
Формулы разности $d=a_{n+1}-a_n$ $d=\dfrac{a_n-a_k}{n-k}$, если $n\neq k$	**Формулы знаменателя** $q=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $q^{n-k}=\dfrac{b_n}{b_k}$, если $n\neq k$

Формулы n-го члена	
$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = a_k + (n-k)d$	$b_n = b_k \cdot q^{n-k}$
$a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$
Характеристическое свойство	
$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, где $n \geq 2$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, где $n \geq 2$
Формулы суммы n первых членов	
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2}n$ $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$	$S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, если $q \neq 1$ $S_n = nb_1$, если $q = 1$
Если $n+m=k+p$, то	
$a_n + a_m = a_k + a_p$	$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$
Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии с $\lvert q \rvert < 1$ $S = \dfrac{b_1}{1-q}$	

Арифметический корень

Умножение корней	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$
Деление корней	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$
Возведение корня в степень	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0)$
Извлечение корня из корня	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(a \geq 0)$
Сокращение показателей	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0)$

Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a\rvert\sqrt[n]{b}$, где n – четное, $b \geq 0$; $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, где n – нечетное.
Внесение множителя под знак корня	Для четных n: $a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a \geq 0,\ b \geq 0), \\ -\sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a < 0,\ b \geq 0). \end{cases}$ Для нечетных n: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.

Степень

Степень с натуральным показателем: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n\ раз}$, $a^1 = a$ Степень с рациональным показателем: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0, m \in Z, n \in N,\ n \neq 1)$ Степень с отрицательным показателем: $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$ $(a \neq 0)$ Степень с нулевым показателем: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$	
Умножение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
Деление степеней	$a^p : a^q = a^{p-q}$
Возведение степени в степень	$(a^p)^q = a^{pq}$
Возведение в степень произведения	$(ab)^p = a^p b^p$
Возведение в степень частного	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

Основные формулы тригонометрии

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Значения тригонометрических функций некоторых углов								
$n°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Формулы сложения

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{ctg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}$
$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{ctg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$

Формулы двойного угла

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$

Формулы понижения степени

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Формулы половинного угла

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$	$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

Формулы тройного угла

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$

Формулы суммы и разности

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

Метод вспомогательного угла

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),$$

где φ определяется из условий $\begin{cases}\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

Дополнительные формулы и соотношения

СОДЕРЖАНИЕ

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ 4

Функции и их свойства 4
Квадратный трехчлен 11
Квадратичная функция и ее график 15
Неравенства с одной переменной 21

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ 33

Уравнения с одной переменной 33
Системы уравнений с двумя переменными 38

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ 47

Последовательности 47
Арифметическая прогрессия 48
Геометрическая прогрессия 52

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ 59

Степенная функция 59
Корень n-й степени ($n \in \mathrm{N}$, $n \neq 1$) и его свойства 62
Степень с рациональным показателем и ее свойства 67

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 73

Тригонометрические функции любого угла 73
Основные тригонометрические формулы 77

ПРИЛОЖЕНИЕ 89

Чтение графика квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ 89
Обобщенный метод интервалов для решения неравенств 93
Метод замены переменной при решении некоторых видов уравнений высших степеней 100
Симметрические уравнения 104
Методы решения некоторых видов дробных рациональных уравнений 108
Методы решения систем нелинейных уравнений 111
Дополнительные тригонометрические преобразования 118

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7-9 КЛАССОВ 121

Учебное издание

Ершова Алла Петровна
Голобородько Вадим Владимирович
Крижановский Александр Феликсович

Тетрадь-конспект по алгебре для 9 класса

Оформление обложки *А.А. Андреев*
Компьютерная верстка *С.И. Удалов*

Подписано в печать 26.07.2012. Формат 70×90/16.

Усл.-печ. л. 9,36. Тираж 3000 экз. Заказ № 2378.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.